Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 27.01.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ $(AC < BC)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C, M)$ ugla γ zaklapaju ugao od 9°, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od 61°. Odrediti uglove $\triangle ABC$.

b) Data je prava a. Konstruisati pravu p koja prolazi kroz datu tačku M koja ne pripada pravoj a, i koja siječe datu pravu a pod uglom od 20°. (Ugao od 20° konstruisti približno tačno.)

c) U $\triangle ABC$ je upisan krug $k(I, r)$. Centar opisanog kruga $k''(M, r'')$ oko $\triangle BCI$ nalazi se na presjeku $pp[A, I]$ i kruga $k'(S, r')$ koji je opisan oko $\triangle ABC$. Spomenute krugove i trouglove nacrtati na proizvoljan način. Nakon toga krug k preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(C, M)$ gdje je M centar kruga k''.

d) Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

e) Pravougaonik je podjeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 9, 2 i 2 cm^2 (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.

5	3	2
	9	
		2

Zadatak br. 2

Dokazati da konveksan mnogougao i prava koja ne sadrži nijednu njegovu stranicu mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke.

Zadatak br. 3

Prave a i b su ose simetrije ravne figure F. Dokazati da je i prava c, koja je simetrična pravoj a u odnosu na pravu b, takođe osa simetrije figure F.

Napomena: Prava s je osa simetrije figure F ako je $\sigma_s(F) = F$.

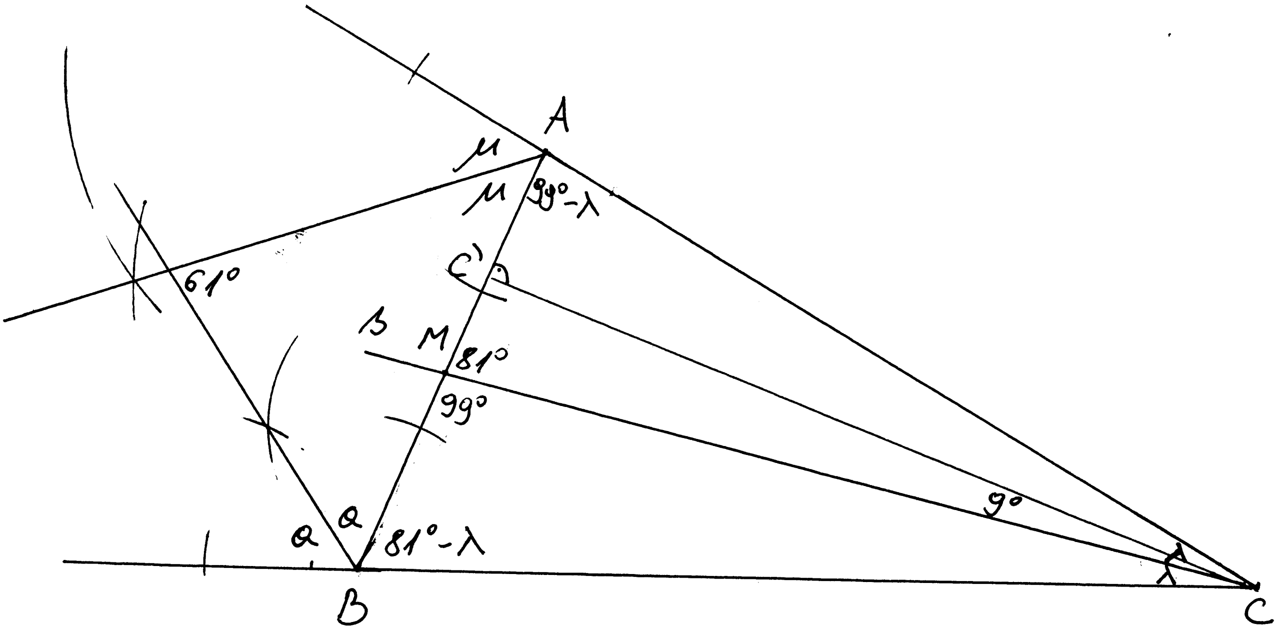
Zadatak br. 4

Ako sva tri tjemena trougla $\triangle A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti $\triangle ABC$, tada je obim $\triangle A_1B_1C_1$ manji od obima trougla $\triangle ABC$. Dokazati.

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

U oštrouglom trouglu ΔABC $(AC < BC)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C, M)$ ugla γ zaklapaju ugao od 9°, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od 61°. Odrediti uglove ΔABC.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

$\Delta CMC'$ pravougli $\Rightarrow$ $\measuredangle CMC' = 81^\circ$; $\measuredangle BMC = 99^\circ$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 99^\circ - \lambda \quad ; \quad \beta = 81^\circ - \lambda$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\mu + 99^\circ - \lambda = 180^\circ \Rightarrow 2\mu = 81^\circ + \lambda \\ 2\theta + 81^\circ - \lambda = 180^\circ \Rightarrow 2\theta = 99^\circ + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2\mu + 2\theta = 180^\circ + 2\lambda \quad \dots (*)$$

$$\theta + \mu + 61^\circ = 180^\circ \quad / \cdot 2$$

$$2\theta + 2\mu + 122^\circ = 360^\circ$$

$$2\theta + 2\mu = 238^\circ \quad \dots (**)$$

$(*) ; (**) \Rightarrow$

$$180^\circ + 2\lambda = 238^\circ$$

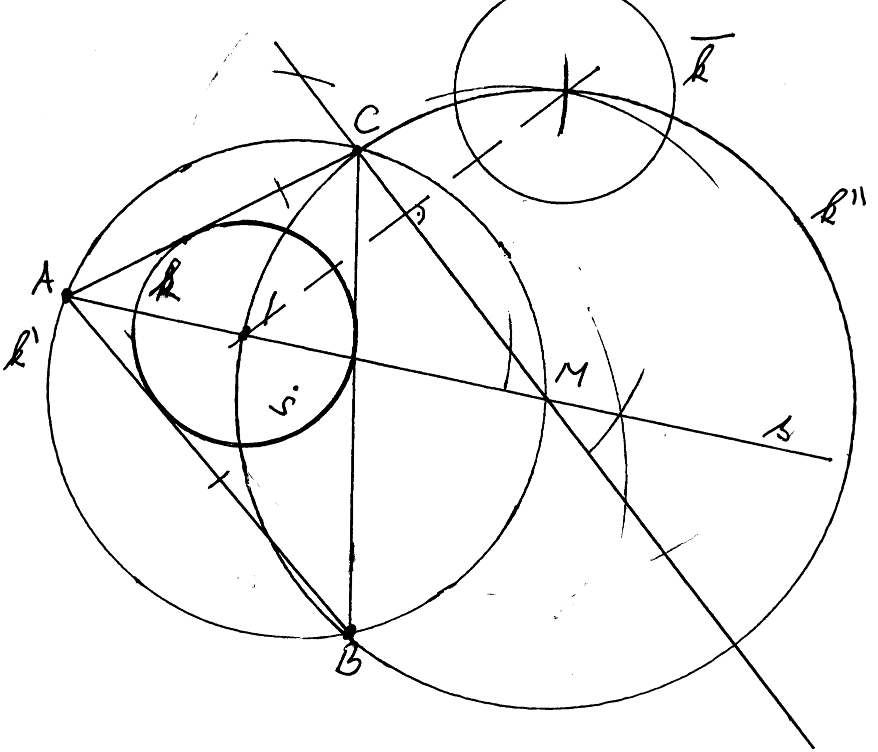
$$2\lambda = 58^\circ$$

$$\lambda = 29^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 70^\circ, \quad \beta = 52^\circ \quad ; \quad \gamma = 58^\circ$$

U $\triangle ABC$ je upisan krug k sa centrom u I. Centar opisanog kruga k'' oko $\triangle BCI$ nalazi se na presjeku $pp[A,I)$ i kruga k' koji je opisana oko $\triangle ABC$. Spomenute krugove i trouglove nacrtati na proizvoljan način. Nakon toga krug k preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(C,M)$ gdje je M centar kruga k''.

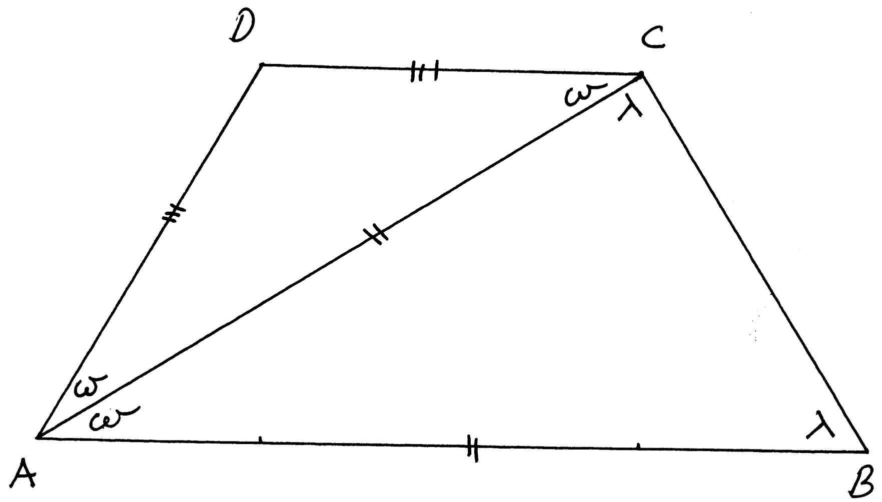
Rj. Prvo ćemo nacrtati $k'(S,r')$, pa ćemo nacrtati $\triangle ABC$, pa simetralu s ugla $\measuredangle BAC$, krug $k''(M,r'')$ i na kraju $k(I,r)$



$$G_{p(M,C)}(k) = \bar{k}$$

(#) Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

R:



jkk trapez □ABCD ima podudarne stranice AD i BC, kao i uglove $\measuredangle DAB \cong \measuredangle ABC$ i $\measuredangle ADC \cong \measuredangle BCD$.

AB je najveća stranica

Kako dijagonala razbija trapez na dva jkk trougla to $\triangle ABC$ jkk sa $AB \cong AC$ i $\triangle ADC$ jkk sa $AD \cong DC$

$\Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle ABC = \lambda$ i $\measuredangle DAC \cong \measuredangle DCA \cong \omega$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB = \omega$

Sad imamo

$$2\omega = \lambda$$
$$\underline{2\lambda + \omega = 180^\circ \quad / \cdot 2}$$

$$4\lambda + 2\omega = 360^\circ$$
$$5\lambda = 360^\circ$$
$$\lambda = 72^\circ \Rightarrow \omega = 36^\circ$$

$\Rightarrow \measuredangle A = 72^\circ, \quad \measuredangle B = 72^\circ, \quad \measuredangle C = 108^\circ, \quad \measuredangle D = 108^\circ$

(#) Pravougaonik je podjeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 9, 2 i 2 cm^2 (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.

5	3	2
	9	
		2

Rj.: Označimo stranice manjih pravougaonika sa a, b, c, d, e i f kao na slici

	a	b	c
d	5	3	2
e	15	9	6
f	5	3	2

Površine tri pravougaonika su dovoljna da odrede površinu četvrtog.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot d=5 \\ b\cdot d=3 \Rightarrow d=\frac{3}{b} \\ e\cdot b=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a\cdot d=5 \\ a\cdot\frac{3}{b}=5 \\ 3a=5b \\ a=\frac{5}{3}b \end{array}$$

$$e\cdot a=e\cdot\frac{5}{3}b=\frac{5}{3}eb=5\cdot 3=15$$

$$\left.\begin{array}{l} b\cdot d=3 \Rightarrow d=\frac{3}{b} \\ b\cdot e=9 \\ c\cdot d=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c\cdot d=2 \\ c\cdot\frac{3}{b}=2 \\ 3c=2b \\ c=\frac{2}{3}b \end{array}$$

$$e\cdot c=e\cdot\frac{2}{3}b=\frac{2}{3}eb=\frac{2}{3}\cdot 9=6$$

$$\left.\begin{array}{l} e\cdot b=9 \Rightarrow e=\frac{9}{b} \\ e\cdot c=6 \\ f\cdot c=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} e\cdot c=6 \\ \frac{9}{b}\cdot c=6 \\ 9c=6b \quad /:3 \end{array}$$

$$2b=3c$$
$$b=\frac{3}{2}c$$

$$f\cdot b=f\cdot\frac{3}{2}c=\frac{3}{2}\cdot 2=3$$

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot e=15 \Rightarrow e=\frac{15}{a} \\ e\cdot b=9 \\ f\cdot b=3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} e\cdot b=9 \\ \frac{15}{a}\cdot b=9 \\ 15b=9a \quad /:3 \end{array}$$

$$3a=5b$$
$$a=\frac{5}{3}b$$

$$f\cdot a=f\cdot\frac{5}{3}b=\frac{5}{3}\cdot 3=5$$

$$10+30+10$$

Površina pravougaonika je 50 cm^2.

(#) Dokazati da konveksan mnogougao i prava koja ne sadrži nijednu njegovu stranicu mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke.

Rj.

postavka zadatka

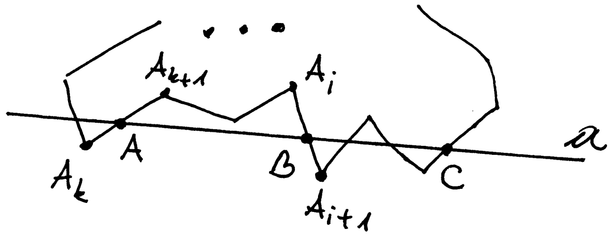
$A_1A_2A_3 \dots A_n$ mnogougao
prava a

$\Big\} \Rightarrow$ prava a i mnogougao mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke.

Neka je dat konveksan mnogougao $A_1A_2 \dots A_n$ $\forall n \geq 6$ i prava a koja ne sadrži ni jednu njegovu stranicu.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da prava a i mnogougao $A_1A_2 \dots A_n$ imaju najmanje tri zajedničke tačke A, B i C, i pretpostavimo da je poredak na pravoj a $A-B-C$ (druga dva moguća poretka su $A-C-B$ i $B-A-C$).

Pokazaćemo da ako imamo ovaj slučaj mnogougao nije konveksan i doći do željene kontradikcije



Mnogougao $A_1A_2 \dots A_n$ konveksan $\Rightarrow$ $AB, BC, AC \subseteq$ unutar mnogougla

Pretpostavimo da tačka $B \in A_iA_{i+1}$.

Znamo da ako je mnogougao konveksan tada se svi vrhovi mnogougla nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu tog mnogougla.

Prema toj tvrdnji svi vrhovi mnogougla se nalaze sa jedne strane prave $p(A_i, A_{i+1})$ $\Rightarrow$ ne mogu istovremeno i tačka A i tačka C pripadati mnogouglu $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ mnogougao $A_1A_2 \dots A_n$ nije konveksan

#kontradikcija

(prema pretpostavci mnogougao je konveksan)

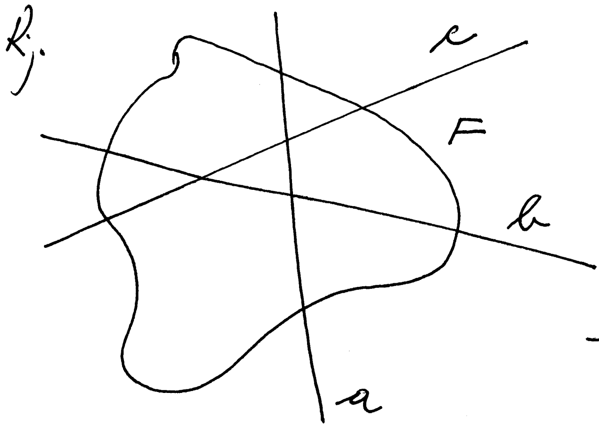
Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome konveksan mnogougao i prava koja ne sadrže nijednu njegovu stranicu mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke

q.e.d.

(#) Prave a i b su ose simetrije ravne figure F. Dokazati da je i prava c, koja je simetrična pravoj a u odnosu na pravu b, takođe osa simetrije figure F.

Napomena: Prava s je osa simetrije figure F ako je $\sigma_s(F)=F$.

Rj.

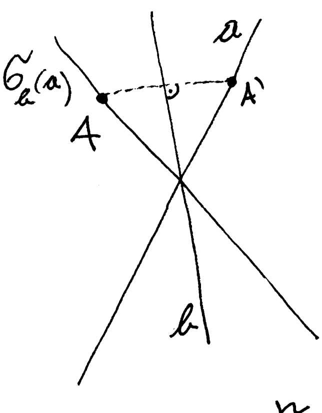


postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_a(F)=F\\ \sigma_b(F)=F\\ \sigma_b(a)=c\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_c(F)=F.$$

Posmatrajmo transformaciju podudarnosti $\gamma=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b$.
(Zašto smo uzeli ovu transformaciju podudarnosti u razmatranje?) (želimo pokazati da je $\sigma_{\sigma_b(a)}=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b$).
Uzmimo proizvoljnu tačku A prave $\sigma_b(a)$.

$$\gamma(A)=\sigma_b(\sigma_a(\sigma_b(A)))\overset{b \text{ sim } AA'}{=\!=\!=}\sigma_b(\sigma_a(A'))\overset{A'\in a}{=\!=\!=}\sigma_b(A')\overset{b \text{ sim } AA'}{=\!=\!=}A$$



A je fiksna tačka transformacije γ.
Kako je A proizvoljna tačka to su sve tačke prave $\sigma_b(a)$ fiksne tačke transformacije podud. γ.
Kako je još $\gamma\circ\gamma=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b\circ\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b=id$ to je γ involutivna transform. podudarnosti pa γ može biti
- identitet
- osna simetrija
- centralna simetrija

γ nije identitet ni centralna simetrija (ZAŠTO?). Prema tome γ je osna simetrija, pa kako su sve tačke prave $\sigma_b(a)$ fiksne tačke $\gamma=\sigma_{\sigma_b(a)}=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b$.

Sad imamo

$$\sigma_c(F)=\sigma_{\sigma_b(a)}(F)=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b(F)=\sigma_b(\sigma_a(\sigma_b(F)))=\sigma_b(\sigma_a(F))=\sigma_b(F)$$
$$=F \quad \text{q.e.d.}$$

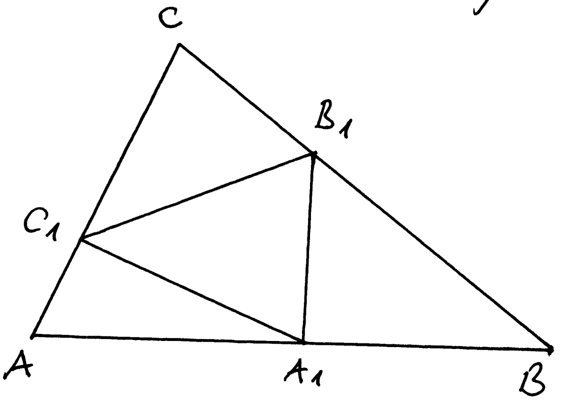
(#) Ako sva tri tjemena trougla $\Delta A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti ΔABC, tada je obim $\Delta A_1B_1C_1$ manji od obima trougla ΔABC. Dokazati.

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ A_1,\ B_1,\ C_1 \in \text{unutrašnjosti } \Delta ABC\end{array}\right\} \Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}.$$

Prije nego što počnemo rješavati naš zadatak razmotrimo dva specijalna slučaja ovog zadatka:

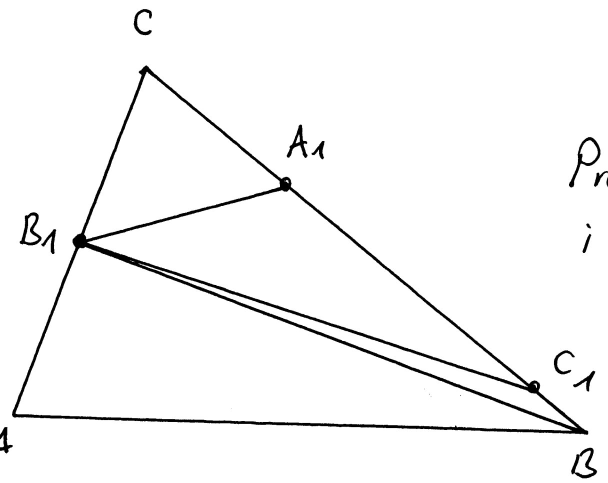
1°



Pretpostavimo da tjemena $\Delta A_1B_1C_1$ leže na stranicama trougla i to $A_1 \in AB$, $B_1 \in BC$ i $C_1 \in AC$. Posmatrajmo ΔA_1BB_1, ΔC_1B_1C i ΔAA_1C. Imamo

$$\begin{array}{rl} & A_1B_1 < A_1B + \underline{BB_1}\\ & B_1C_1 < CC_1 + \underline{CB_1}\\ + & A_1C_1 < AA_1 + AC_1\\ \hline & O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}\end{array}$$

2°



Pretpostavimo da $A_1, C_1 \in BC$ i $B_1 \in AC$ i pokažimo da $O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}$.

$$\begin{array}{rl} & A_1B = A_1B\\ & A_1B_1 < B_1C + CA_1\\ + & B_1B < AB_1 + AB\\ \hline & O_{\Delta A_1B_1B} < O_{\Delta ABC} \quad \ldots(1)\end{array} \qquad \begin{array}{rl} & B_1C_1 < B_1B + BC_1\\ & B_1A_1 = B_1A_1\\ + & A_1C_1 = A_1C_1\\ \hline & O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta B_1BA_1} \quad \ldots(2)\end{array}$$

(1) i (2) $\Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}$

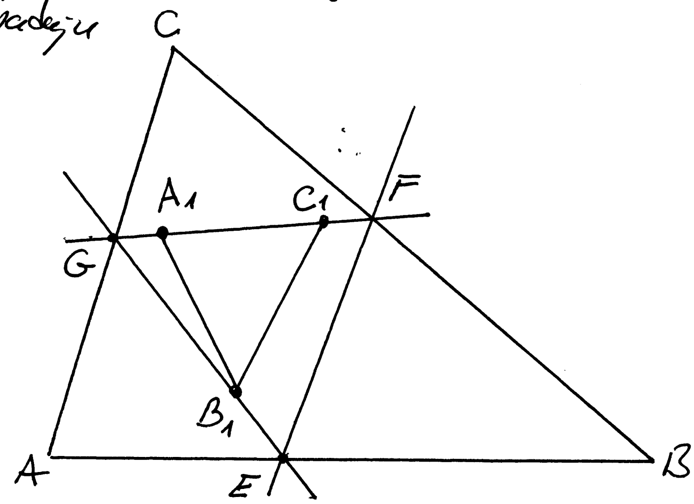
Na osnovu ova dva slučaja rješimo naš zadatak.

Pretpostavimo da tjemena $\Delta A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti ΔABC

$p(A_1, C_1) \cap BC = \{F\}$

$p(A_1, C_1) \cap AC = \{G\}$

$p(G, B_1) \cap AB = \{E\}$



$$\left.\begin{array}{l}1^\circ \Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta EFG}\\ 2^\circ \Rightarrow O_{\Delta EFG} < O_{\Delta ABC}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta EFG}$ q.e.d.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.02.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) Paralelogram je četverougao koji ima dva para paralelnih stranica. Dokazati da je četverougao $\square ABCD$ paralelogram akko mu se dijagonale polove.

b) Površina pravouglog trougla $\triangle ABC$ se računa po formuli $P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

c) Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

d) Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Dokazati da se dijagonale AD, CF i BE sijeku u istoj tački S.

e) Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

Zadatak br. 2

Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

Zadatak br. 3

Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju eliptičnom pramenu pravih.
(Napomena: Eliptičan pramen pravih je skup pravih koje prolaze kroz istu tačku.)

Zadatak br. 4

Neka je AB najmanja stranica trougla $\triangle ABC$ i M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla. Dokazati da je $MA + MB + MC < AC + BC$.

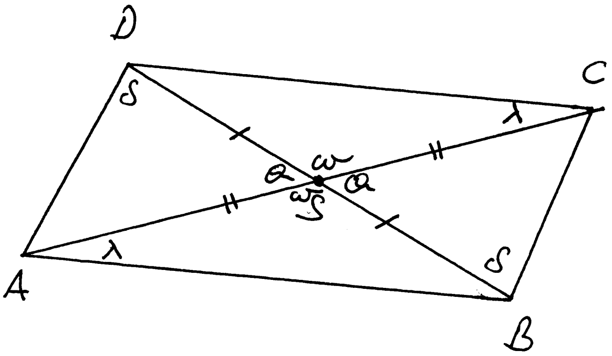
(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Paralelogram je četverougao koji ima dva para paralelnih stranica. Dokazati da je četverougao $\square ABCD$ paralelogram akko mu se dijagonale polove.

Rj.

„$\Leftarrow$": $\square ABCD$ četverougao u kome se dijagonale polove $\Longrightarrow$ $\square ABCD$ je paralelogram

---



$AC \cap BD = \{S\}$

S je sredina AC i BD

Posmatrajmo ΔABS i ΔCDS

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong CS \\ \angle BSA \cong \angle CSA = \omega \\ BS \cong DS \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta ASB \cong \Delta CSD$$

unakrsni uglovi

$\Downarrow$

$\angle BAC \cong \angle ACD = \lambda$

$\Longrightarrow \quad p(A,B) \parallel p(C,D)$

Posmatrajmo ΔASD i ΔBSC

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong CS \\ \angle ASD \cong \angle BSC = \alpha \\ BS \cong DS \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta ASD \cong \Delta BSC$$

unakrsni uglovi

$\Downarrow$

$\angle ADS \cong \angle CBS = \delta$

$\Downarrow$

$p(A,D) \parallel p(B,C)$

Sad imamo

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,D) \parallel p(B,C)$ $\Longrightarrow$ $\square ABCD$ je paralelogram

---

„$\Longrightarrow$": $\square ABCD$ paralelogram $\Longrightarrow$ dijagonale se polove

Završiti za vježbu.

Uputa: Prvo pokazati da je $AB \cong CD$. Pa onda da je $\Delta ABS \cong \Delta CDS$

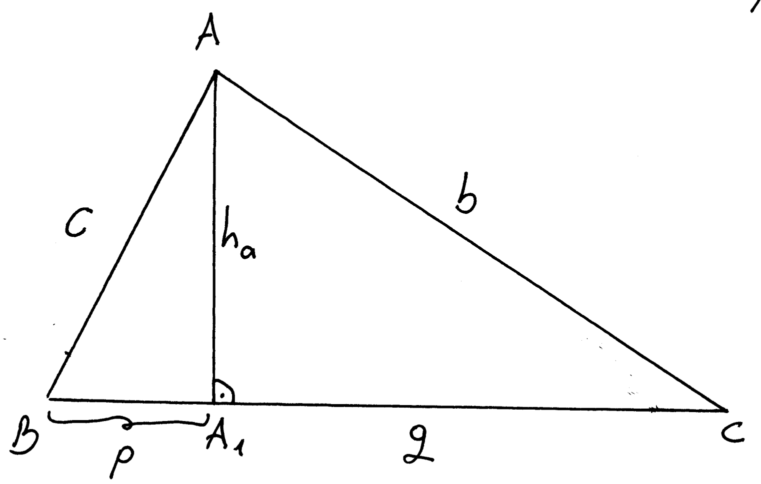
$\Downarrow$

$BS \cong DS$; $AS \cong CS$

q.e.d.

(#) Površina pravouglog trougla ΔABC se računa po formuli $P=\frac{a\cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P=\frac{a\cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

Rj.: raznostraničan trougao



$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta BA_1A}+P_{\Delta AA_1C}$$

$$P_{\Delta BA_1A}=\frac{p\cdot h_a}{2}$$

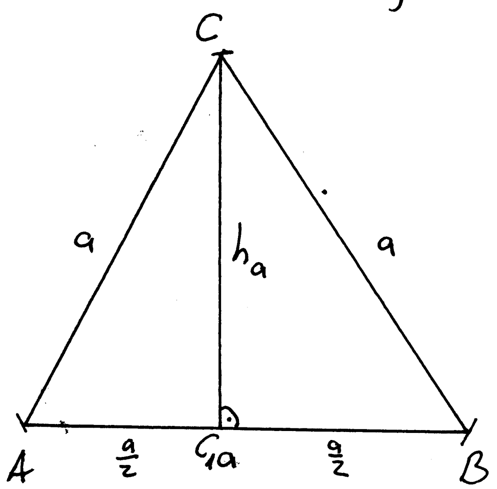
$$P_{\Delta A_1CA}=\frac{g\cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{p\cdot h_a}{2}+\frac{g\cdot h_a}{2}=\frac{p\cdot h_a+g\cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{(p+g)\,h_a}{2}=\frac{a\cdot h_a}{2}$$

q.e.d.

jednakostraničan trougao



$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta AC_1C}+P_{\Delta BCC_1}$$

$$\left.\begin{aligned}P_{\Delta AC_1C}&=\frac{\frac{a}{2}\cdot h_a}{2}=\frac{a\cdot h_a}{4}\\ P_{\Delta BCC_1}&=\frac{\frac{a}{2}\cdot h_a}{2}=\frac{a\cdot h_a}{4}\end{aligned}\right\}\quad P_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot h_a}{2}$$

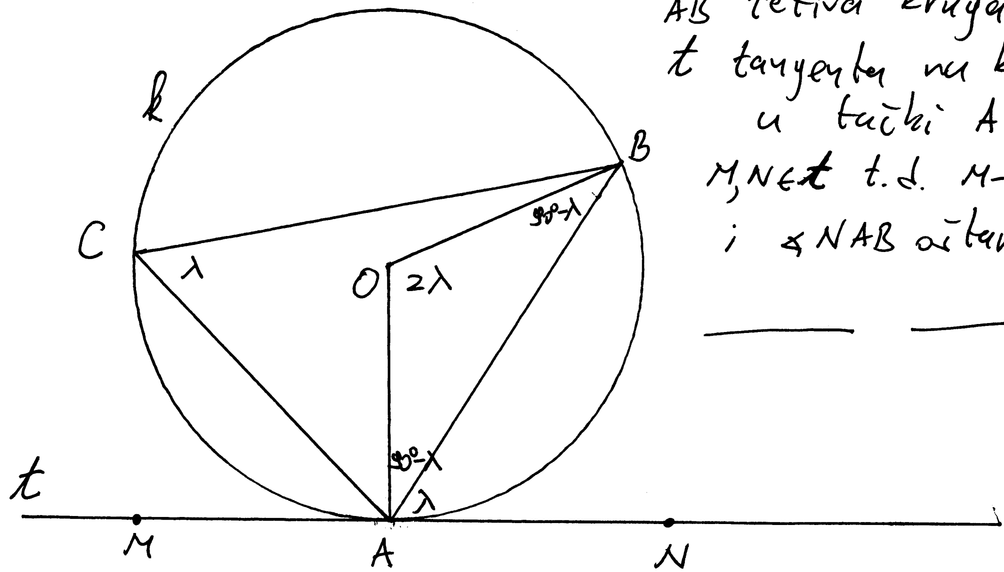
$$h_a^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$$

$$h_a=\frac{1}{2}a\sqrt{3}\qquad P_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

Rj.

$$\left.\begin{array}{l} k(O,r) \text{ dati krug} \\ AB \text{ tetiva kruga} \\ t \text{ tangenta na krug u tački } A \\ M,N \in t \text{ t.d. } M-A-N \\ \text{i } \sphericalangle NAB \text{ oštar} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle NAB \cong \sphericalangle ACB$$



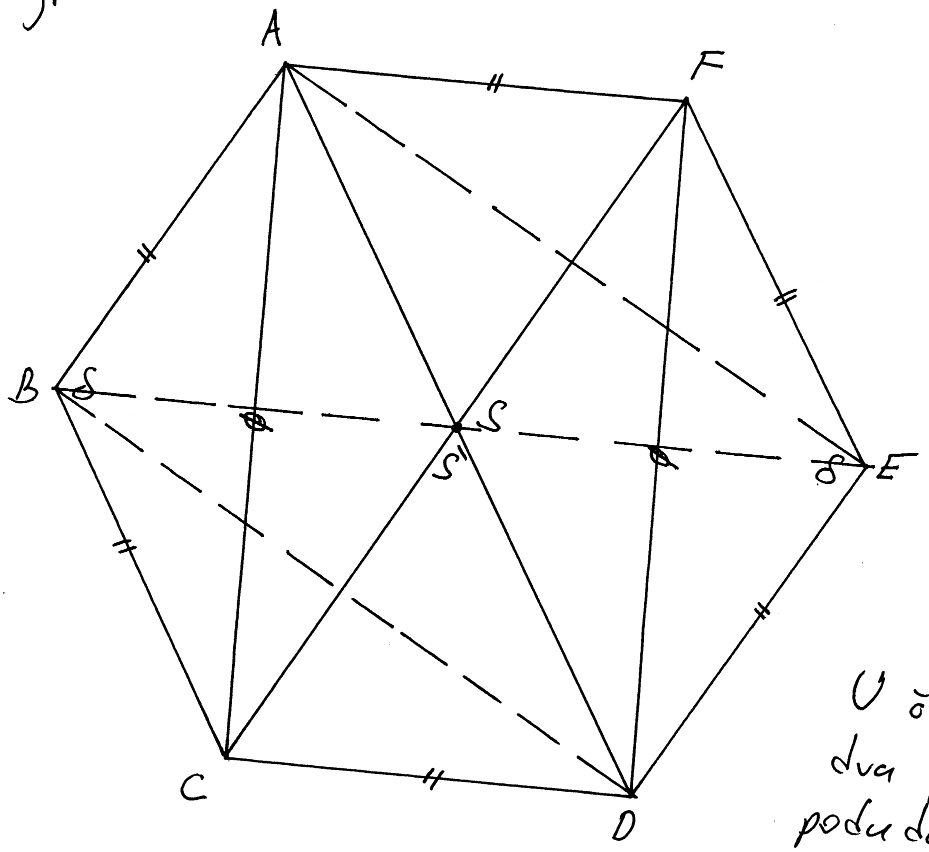
$\sphericalangle ACB=\lambda \Rightarrow \sphericalangle AOB=2\lambda \Rightarrow \sphericalangle OAB \cong \sphericalangle OBA = 90^\circ-\lambda$

Kako je $OA \perp t \Rightarrow \sphericalangle BAN=\lambda \Rightarrow \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle BAN=\lambda$

q.e.d.

(#) Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao $ABCDEF$. Dokazati da se dijagonale AD, CF i BE sijeku u istoj tački S.

Rj.:



Presjek dijagonala AD i CF označimo sa S.
Posmatrajmo ΔABC i ΔFDE.
Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong EF \\ \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle FED = \delta \\ BC \cong ED \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow}$$

$$\Delta ABC \cong \Delta FED$$
$$\Downarrow$$
$$AC \cong FD$$

U četvorouglu $\square ABCD$ imamo dva para naspremnih podudarnih stranica $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\square ACDF$ je paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale CF i AD se polove tj. S je sredina dijagonale CF i S je sredina dijagonale AD.

Dalje neka je $\{S'\} = BE \cap AD$. Na isti način kao maloprije se pokaže da je $\square BDEA$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow$ S' sredina BE i S' sredina AD.

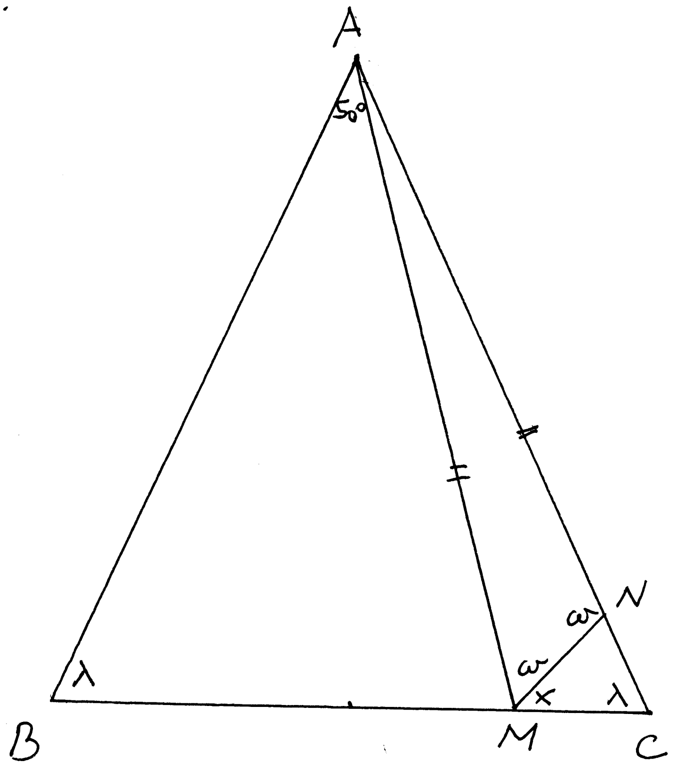
$$\left.\begin{array}{l} S' \text{ sredina } AD \\ S \text{ sredina } AD \end{array}\right\} \Rightarrow S \equiv S' \Rightarrow$$

dijagonale AD, CF i BE se sijeku u tački S

q.e.d.

(#) Zadan je jednakokraki trougao ΔABC sa osnovicom BC tako da je ugao $\sphericalangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\sphericalangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\sphericalangle CMN$.

Rj.



$\sphericalangle MNA$ je vanjski ugao ΔMCN

$$\omega = x + \lambda \quad \ldots (1)$$

$\sphericalangle AMC$ je vanjski ugao ΔABM

$$50° + \lambda = \omega + x \quad \ldots (2)$$

$(1)+(2)$: $\omega + 50° + \lambda = x + \lambda + \omega + x$

$$2x = 50°$$

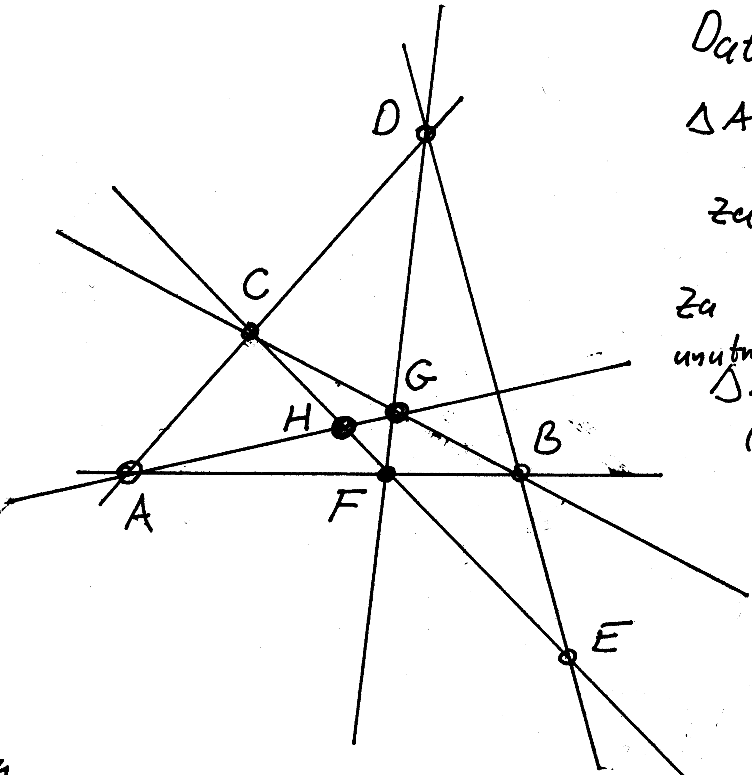
$$x = 25°$$

(#) Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

Rj.

postavka zadatka

$\triangle ABC \Rightarrow \exists$ tačka H takva da $H \in$ unutrašnjosti $\triangle ABC$



Date su tačke A, B i C tj. $\triangle ABC$.

za A i C prema II_2 $\exists D: A-C-D$

za D i B prema II_2 $\exists E: D-B-E$

unutrašnjost $\triangle ABC$ je konveksna figura (dobijena kao presjek tri poluravni)

A, B, D nekolinearne tačke
$p(C,E)$ nije incidentna ni sa jednom od tih tački
$\exists C \in p(C,D)$ takva da $A-C-D$
$\Big\} \xrightarrow{II_4}$

$\xrightarrow{II_4} \exists F \in p(C,E): A-F-B \lor B-F-D$.

Prava $p(E,C)$ ne siječe pravu $p(B,D)$ između tački B i D zato što tu pravu ona siječe u tački E (zato što je $D-B-E$). Prema tome $A-F-B$.

A, B, C nekolinearne tačke
$p(F,D)$ nije incidentna ni sa jednom od tački A, B, C
$\exists F \in p(F,D)$ taka $A-F-B$
$\Big\} \underset{(A-C-D)}{\xrightarrow{II_4}} \exists G \in p(F,D):$ $C-G-B$

C, F, B nekolinearne tačke
$p(A,G)$ nije incidentna ni sa jednom od tačhi C, F i B
$\exists G \in p(A,G)$ tako $C-G-B$
$\Big\} \underset{(A-F-B)}{\xrightarrow{II_4}} \exists H \in p(A,G):$ $A-H-G$

A vrh trougla, $G \in BC$; $A-H-G$ $\xrightarrow{\triangle ABC \text{ je konveksan}}$ $H \in$ unutr. $\triangle ABC$

q.e.d.

(#) Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju eliptičnom pramenu pravih.

Napomena: Eliptičan pramen pravih je skup svih pravih koje prolaze kroz istu tačku.

Rj.

„$\Leftarrow$": $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \Rightarrow a, b$ i c pripadaju eliptičnom pramenu pravih

— — a, b, c, d tri različite prave

Kako pokazati da tri prave pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih?

Trebamo pokazati da se a, b i c sijeku u istoj tački.

Neka je $a \cap b = \{S\}$

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c$ sa desne strane

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c$

$\sigma_a \circ \sigma_b (S) = \sigma_d \circ \sigma_c (S) \quad \Rightarrow \quad \sigma_d \circ \sigma_c (S) = S$

Ako bi pretpostavili da je $\sigma_c(S) = S'$ $(S' \neq S)$ dobili bi da $\sigma_d \circ \sigma_c(S) = \sigma_d(S') = S \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} c \text{ simetrala } SS' \\ d \text{ simetrala } SS' \end{array}\right\} \Rightarrow c \equiv d$

kontrad. (sa $c \neq d$)

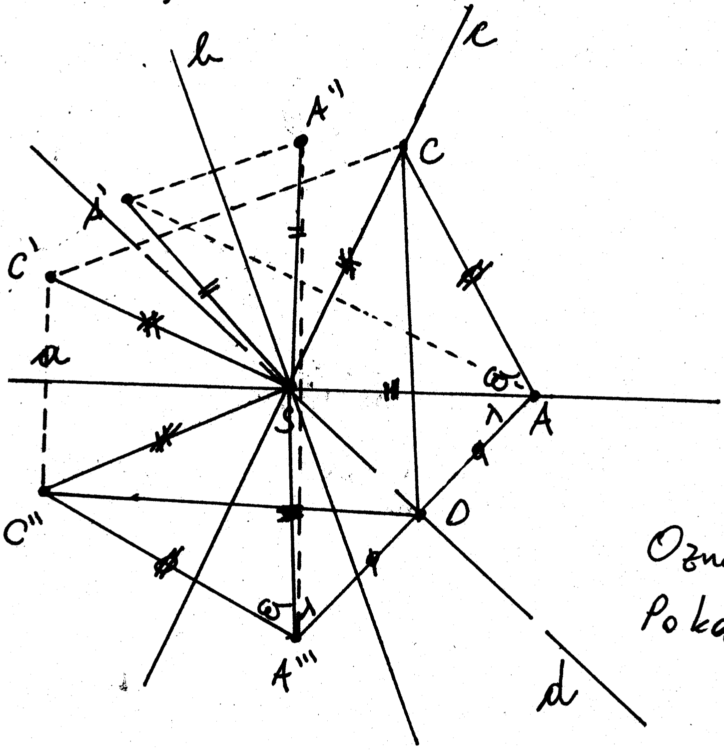
Prema tome ako je $\sigma_d \circ \sigma_c(S) = S$ i $\sigma_c(S) = S$ to znači (to je moguće samo u slučaju) da se c i d sijeku u tački S.

$\Rightarrow a \cap b \cap c = \{S\} \Rightarrow a, b$ i c pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih

— — —

„$\Rightarrow$": a, b, c pripadaju eliptičnom pramenu $\Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ je osna simetrija.

Neka je $a \cap b \cap c = \{S\}$. Označimo sa $\mathcal{I} = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$



a) posmatrajmo tačku S

$\mathcal{I}(S) = S$

b) uzmimo proizvoljnu tačku $A \in a$, $A \neq S$. Neka je

$\sigma_c(A) = A'$, $\sigma_b(A') = A''$, $\sigma_a(A'') = A'''$

tj. $\mathcal{I}(A) = A'''$

Označimo sa d simetralu duži AA''', Pokažimo da je $S \in d$.

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_c(A) = A' \Rightarrow SA \cong SA' \\ \sigma_b(A') = A'' \Rightarrow SA' \cong SA'' \\ \sigma_a(A'') = A''' \Rightarrow SA'' = SA''' \end{array}\right\} \Rightarrow SA \cong SA'''$$

$\Delta SA'''A$ je jkk sa osnovicom AA''' $\Rightarrow S \in d$

(d sadrži visinu)

c) Uzmimo proizvoljnu tačku $C \in c$, $C \neq S$. Neka je

$\sigma_c(C) = C$, $\sigma_b(C) = C'$, $\sigma_a(C') = C''$ tj. $\mathcal{I}(C) = C''$.

Pokažimo da je d simetrala duži CC''.

Označimo sa $\{D\} = d \cap AA'''$.

Iz dijela b) smo dobili da je $AD \cong A'''D$ i $\measuredangle DAS \cong \measuredangle DA'''S = \lambda$

Podudarnost čuva dužine pa je $AC \cong \mathcal{I}(A)\mathcal{I}(C) = A'''C''$

Dalje imamo
$$\left.\begin{array}{l} CS \cong C''S \\ AC \cong A'''C'' \\ AS \cong A'''S \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \Delta A'''SC'' \cong \Delta ASC$$
$$\Downarrow$$
$$\measuredangle C''A'''S \cong \measuredangle SAC = \omega$$

Posmatrajmo $\Delta C''A'''D$ i ΔACD. U njima su podudarni SUS pa su ta dva trougla podudarna $\Rightarrow CD \cong C''D \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta CC''D$ je jkk sa osnovicom CC'' $\Rightarrow$ d simetrala CC''

Sad imamo
$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{I}(S) = S \\ \mathcal{I}(A) = A''' \\ \mathcal{I}(C) = C'' \end{array}\right\} \text{ i } \left.\begin{array}{l} \sigma_d(S) = S \\ \sigma_d(A) = A''' \\ \sigma_d(C'') = C'' \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{nekolinearne}]{A,\,S,\,C} \sigma_d = \mathcal{I} \text{ tj. } \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$$

q.e.d.

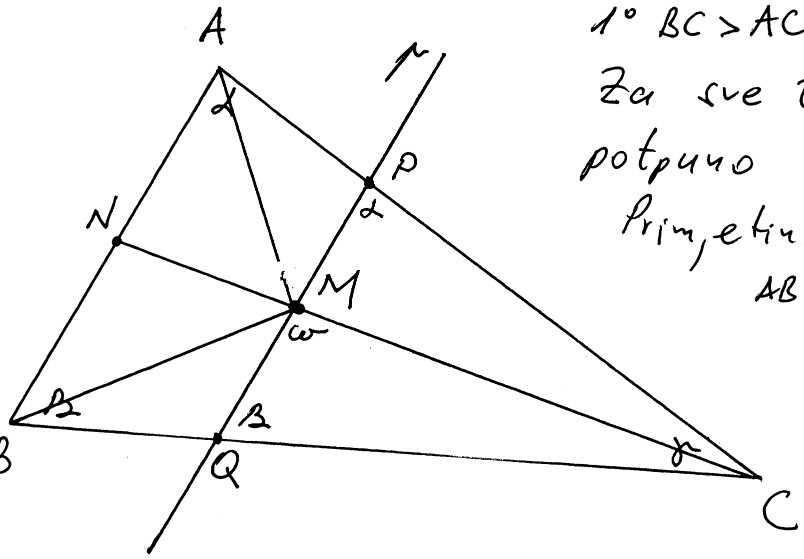
(#) Neka je AB najmanja stranica trougla ΔABC i M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla ΔABC. Dokazati da je $MA+MB+MC < AC+BC$.

Rj.
postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ AB \text{ najmanja stranica} \\ M \text{ proizvoljna tačka u} \\ \quad \text{unutrašnjosti trougla} \end{array}\right\} \Longrightarrow MA+MB+MC < AC+BC$$

Prema pretpostavci u ΔABC najmanja stranica je AB. Za stranice AC i BC je moguć jedan od sljedeća tri slučaja

$1^\circ\ BC > AC \quad 2^\circ\ BC \cong AC \quad i \quad 3^\circ\ BC < AC$



Za sve tri slučaja rješenje je potpuno isto, pa neka je $BC > AC$.
Primjetimo sad da imamo

$AB < AC < BC \implies \gamma < \beta < \alpha$.

Dalje, neka je M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla.

Kroz tačku M konstruišimo pravu p t.d. $p \parallel p(A,B)$.

$p \cap AC = \{P\}$ i $p \cap BC = Q$

$p(P,Q) \parallel p(A,B)$ i $p(C,A)$ transferzala $\implies \measuredangle CAB \cong \measuredangle CPQ = \alpha$

$p(P,Q) \parallel p(A,B)$ i $p(B,C)$ transferzala $\implies \measuredangle CBA \cong \measuredangle CQP = \beta$

Ugao $\measuredangle CMQ = \omega$ je vanjski ugao ΔCPM pa je $\omega > \alpha$.

Kako je $\alpha > \beta$ to je $\omega > \beta \overset{\Delta QCM}{\implies} QC > MC$

Dalje $\left.\begin{array}{l} MB < BQ + MQ \\ AM < AP + MP \end{array}\right\} + \implies MB + MA < BQ + AP + \underbrace{PM + MQ}_{=PQ}$

$MA+MB < BQ+AP+PQ \overset{\text{ZAŠTO}}{<} BQ+AP+PC$

Konačno imamo

$$\left.\begin{array}{l} MC < QC \\ MA+MB < BQ+AP+PC \end{array}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} MA+MB+MC < AC+BC$$

q.e.d.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 15.06.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2\,cm$, $h_b = 4\,cm$ i $h_c = 6\,cm$?

b) Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ $(AC = BC)$. Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\measuredangle ABM \cong \measuredangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$?

c) Dat je trougao $\triangle ABC$. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A, B i C datog trougla.

d) Neka je I centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC), k krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka P presječna tačka poluprave $pp[B, I)$ i kruga k. Dokazati da je $\triangle AIP$ jednakokraki.

e) Neka je I centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC). Neka je k krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka P središte luka AC (kojem ne pripada tačka B) kruga k. Dokazati da I pripada duži BP.

Zadatak br. 2

Dokazati tvrđenja:
a) Svaka dijagonala dijeli konveksan mnogougao na dva konveksna mnogougla;
b) Svaka duž čije krajnje tačke pripadaju različitim stranicama konveksnog mnogougla dijeli taj mnogougao na dva konveksna mnogougla.

Zadatak br. 3

Naći sve involutivne transformacije podudarnosti u ravni (involutivna - sama sebi inverzna).

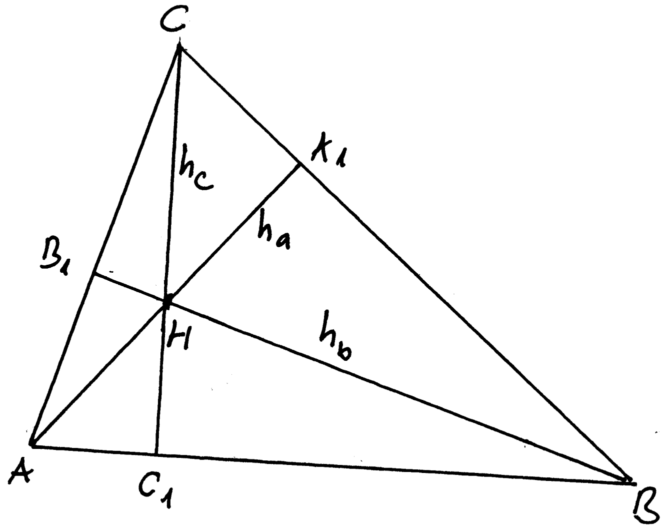
Zadatak br. 4

Neka su P i Q redom sredine stranica AC i BC trougla $\triangle ABC$, R ortogonalna projekcija tjemena C na simetralu ugla $\measuredangle BAC$. Dokazati da su tačke P, Q i R kolinearne.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(7) Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a=2$ cm, $h_b=4$ cm i $h_c=6$ cm?

Rj.



$h_a = 2$ cm

$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{2a}{2} = a$

$h_b = 4$ cm

$P = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{4b}{2} = 2b$

$h_c = 6$ cm

$P = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{6c}{2} = 3c$

Sad imamo

$a = 2b = 3c$ tj. $b = \frac{1}{2}a$

$c = \frac{1}{3}a$

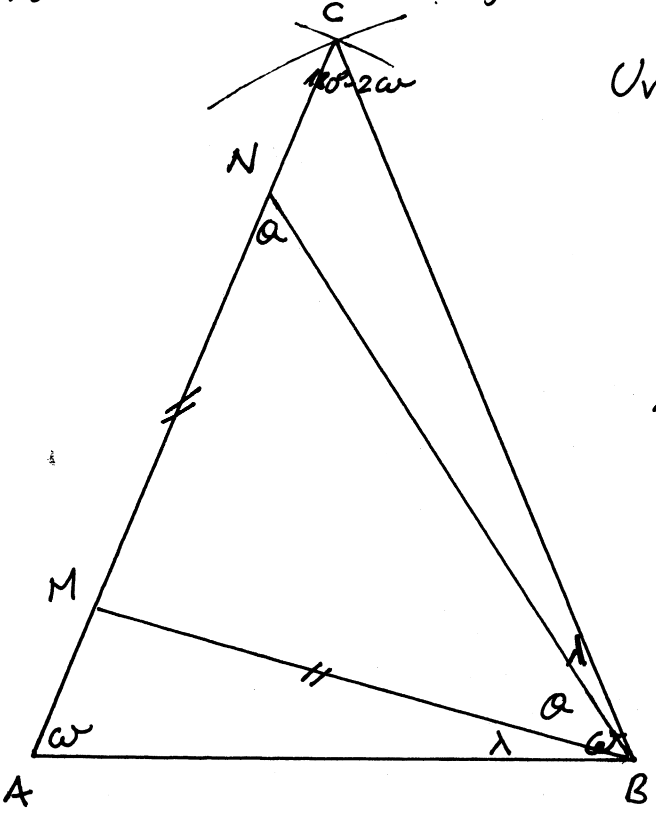
Kako je

$b + c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a = \frac{5}{6}a$ tj. $b + c < a$

trougao sa datim dužinama visina ne postoji (zbir dvije stranice mora biti veći od treće).

#) Dat je jednakokraki trougao ΔABC $(AC = BC)$. Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\sphericalangle ABM \cong \sphericalangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\sphericalangle ABN$?

Rj.



Uvedimo oznake

$\sphericalangle ABM \cong \sphericalangle CBN = \lambda$
(prema pretpostavci)

ΔABC jkk $\Rightarrow \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BAC = \omega$.

ΔBMN jkk $\Rightarrow \sphericalangle MBN \cong \sphericalangle BNM = \theta$.

Sad primjetimo

$\sphericalangle ABC = 180° - 2\omega$

Kako je $\sphericalangle BNA$ vanjski ugao ΔABC to je

$\theta = 180° - 2\omega + \lambda$

(kako je $\sphericalangle BMA$ vanjski ugao ΔABM)
$\Longrightarrow$

$$\sphericalangle AMB = 2\theta = 360° - 4\omega + 2\lambda$$

Posmatrajmo trougao ΔABM.

$$\underline{\omega} + \lambda + 360° \underline{- 4\omega} + 2\lambda = 180°$$

$$3\omega - 3\lambda = 180° \quad /:3$$

$$\omega = 60° + \lambda \quad \Rightarrow \quad \theta = 180° - 120° - 2\lambda + \lambda$$

$$\theta = 60° - \lambda$$

Na kraju $\sphericalangle ABN = \lambda + \theta = \lambda + 60° - \lambda = 60°$

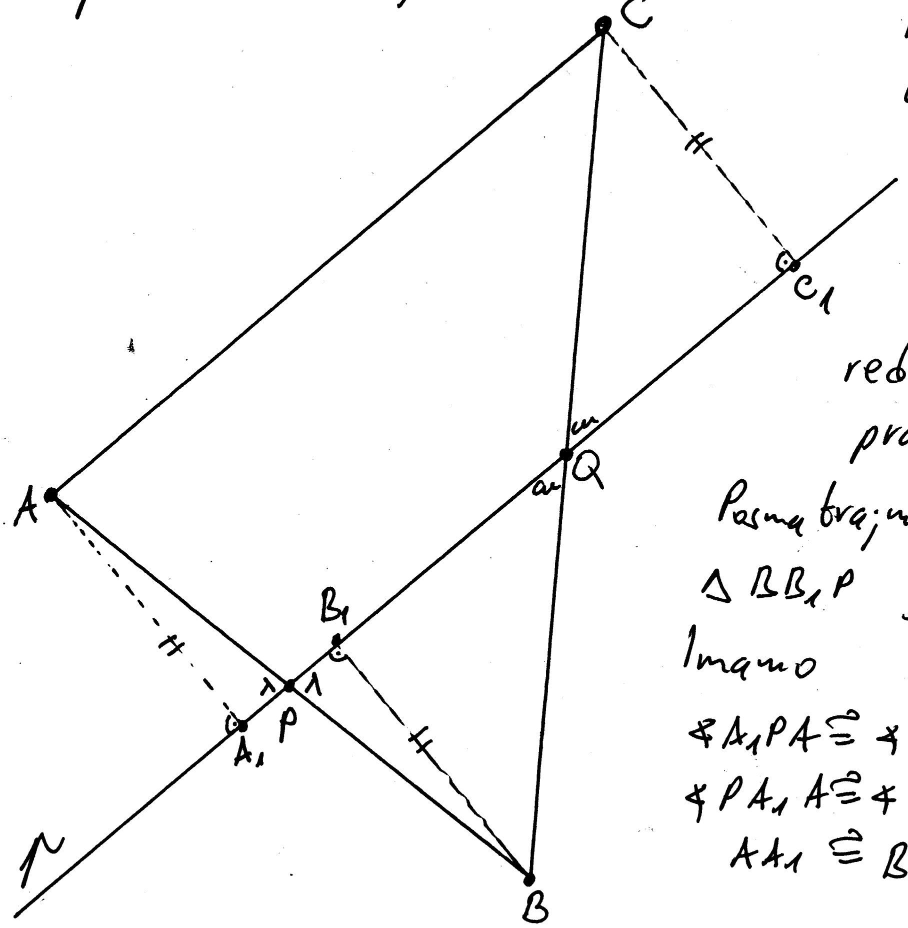
$$\sphericalangle ABN = 60°.$$

Dat je trougao ΔABC. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A, B, C datog trougla.

Rj.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je p tražena prava koja je podjednako udaljena od vrhova A, B i C trougla ΔABC, i neka je poredak tački kao na slici. Označimo sa A_1, B_1 i C_1 ortogonalne projekcije redom tački A, B i C na pravu p.



Posmatrajmo trouglove ΔAA_1P i ΔBB_1P gdje je $\{P\} = p \cap AB$.

Imamo

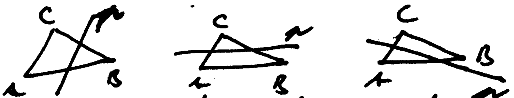
$$\left.\begin{aligned} &\sphericalangle A_1PA \cong \sphericalangle B_1PB = \lambda \\ &\sphericalangle PA_1A \cong \sphericalangle PB_1B = 90^\circ \\ &AA_1 \cong BB_1 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta AA_1P \cong \Delta BB_1P \Rightarrow AP \cong BP$$

Slično, posmatrajmo ΔB_1BQ i ΔC_1CQ (gdje je $\{Q\} = p \cap BC$.

$$\left.\begin{aligned} &\sphericalangle B_1QB \cong \sphericalangle C_1QC = \omega \\ &\sphericalangle BB_1Q \cong \sphericalangle CC_1Q = 90^\circ \\ &BB_1 \cong CC_1 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta BB_1Q \cong \Delta CC_1Q \Rightarrow BQ \cong CQ.$$

Prema tome možemo primijetiti da prava p prolazi kroz sredine stranica AB i BC pa je možemo konstruisati.

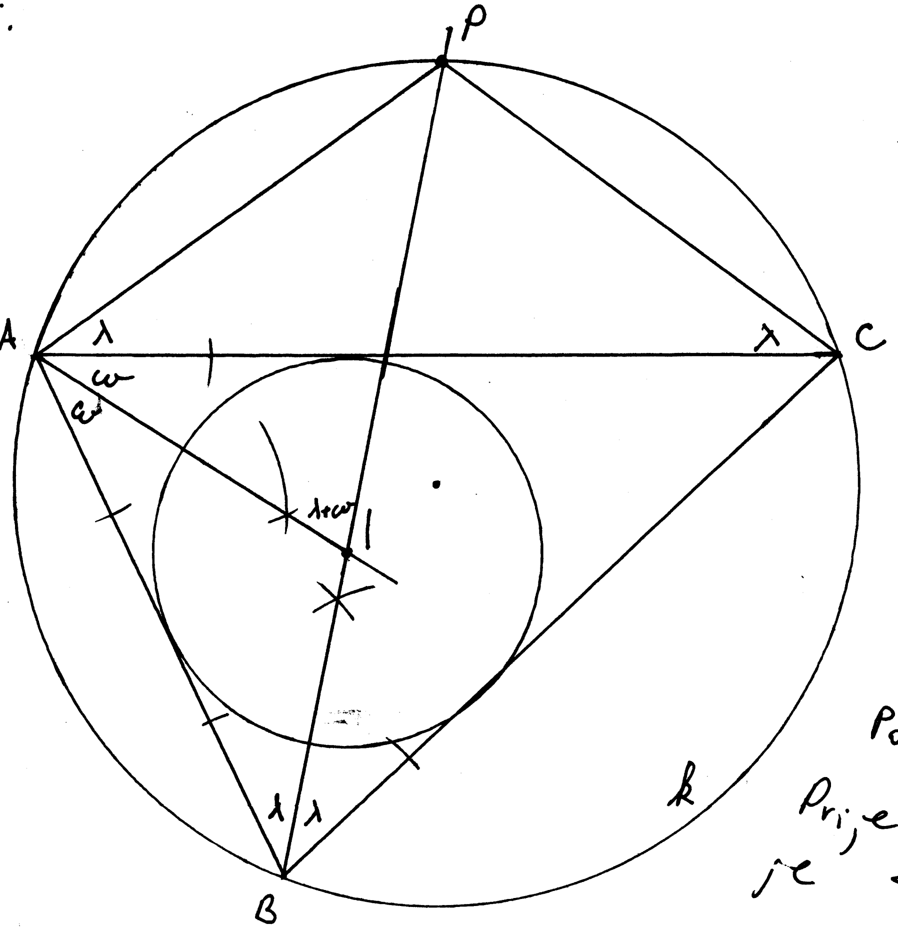
<u>Diskusija</u>



Zadatak ima tri rješenja, tj. možemo konstruisati tri različite prave koje su jednako udaljene od vrhova A, B i C datog trougla

(#) Neka je I centar upisanog kruga trougla ΔABC ($AB<BC$), k krug opisan oko trougla ΔABC i tačka P presječna tačka poluprave $pp[B,I)$ i kruga k. Dokazati da je ΔAIP jednakokraki.

Rj.



Tačka I leži na presjeku simetrala uglova pa imamo da je $\angle ABP \cong \angle CBP = \lambda$.
Četvorougao $\square ABCP$ je tetivni pa možemo zaključiti da je

$\angle PAC = \angle PBC = \lambda$ i

$\angle PCA = \angle ABP = \lambda$

Posmatrajmo sad ΔAIP.
Prije toga primjetimo da je $\angle BAI \cong \angle CAI = \omega$
(ZAŠTO?)

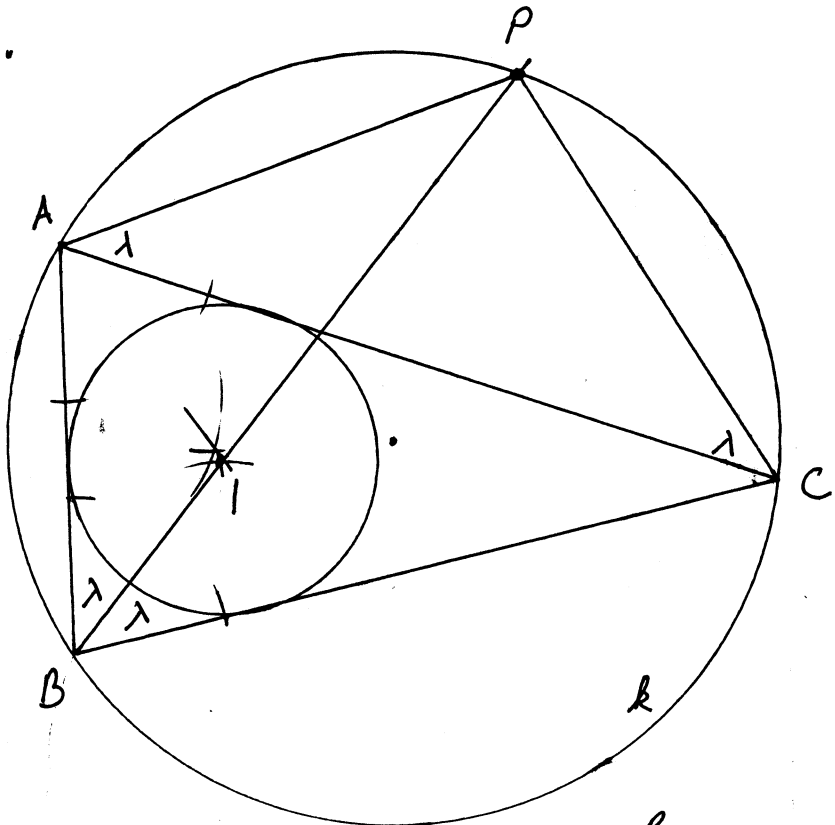
U trouglu ΔPAI $\angle PAI = \lambda+\omega$. Ugao $\angle AIP$ je vanjski ugao trougla ΔAIB pa je $\angle PIA = \angle ABI + \angle IAB = \lambda+\omega$ (vanjski ugao trougla jednak je zbiru unutrašnja dva nesusjedna ugla). Prema tome $\angle PAI \cong \angle AIP = \lambda+\omega$

$\Rightarrow$ ΔAPI je jkk

q.e.d.

(#) Neka je I centar upisanog kruga trougla ΔABC $(AB<BC)$. Neka je k krug opisan oko trougla ΔABC i tačka P središte luka $\widehat{AC}$ (kojem ne pripada tačka B) kruga k. Dokazati da I pripada duži BP.

Rj.



P središte luka AC

$\Rightarrow$ P je podjednako udaljena od tački A i C $\Rightarrow$ ΔACP jkk

$\Rightarrow$ $\sphericalangle PAC \stackrel{\sim}{=} \sphericalangle PCA = \lambda$.

Četverougao $\square ABCP$ je tetivni pa imamo da

$\sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC = \lambda$ i

$\sphericalangle ABP \stackrel{\sim}{=} \sphericalangle ACP = \lambda$

pa je BP simetrala ugla $\sphericalangle ABC$.

Kako je tačka I presjek simetrala uglova to je

$$I \in BP$$

q.e.d.

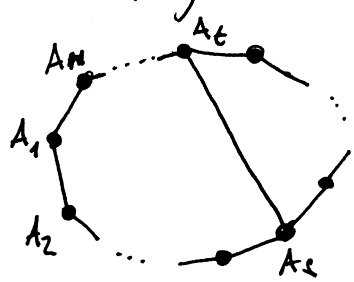
\# Dokazati tvrđenja:

(a) Svaka dijagonala dijeli konveksan mnogougao na dva konveksna mnogougla;

(b) Svaka duž čije krajnje tačke pripadaju različitim stranicama konveksnog mnogougla dijeli taj mnogougao na dva konveksna mnogougla.

Rj. Prisjetimo se definicije konveksnosti: Za figuru F u ravni ili u prostoru kažemo da je konveksna ako za svake dvije tačke A i B iz F imamo da sve tačke duži AB pripadaju figuri F.

a) Neka je $A_1A_2\ldots A_N$ konveksan mnogougao. Trebamo dokazati da svaka dijagonala dijeli ovaj mnogougao na dva konveksna mnogougla.



Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da postoji dijagonala A_tA_s koja dijeli mnogougao na dva mnogougla od kojih jedan nije konveksan. Mnogougao koji nije konveksan označimo sa $A_sA_{s+1}\ldots A_t$. Kako mnogougao nije konveksan to znači da postoje dvije tačke A i B koje pripadaju unutrašnjosti mnogougla ali $AB \notin A_sA_{s+1}\ldots A_t$. To znači da $\exists$ tačka $C\in AB$ takva da $C\notin$ unutrašnjosti mnogougla.

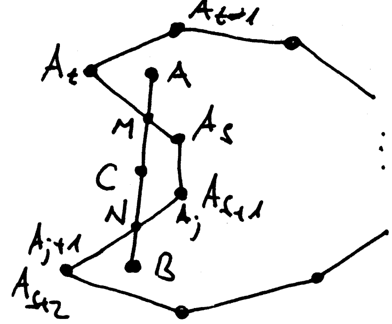
Ako sad posmatramo duži AC i BC, kako A i B pripadaju unutrašnjosti a tačka C vanjskoj oblasti mnogougla to AC siječe neku stranicu mnogougla A_iA_{i+1} u tački M a BC neku drugu stranicu A_jA_{j+1} u tački N.

Za tačke M i N je moguć jedan od sljedeća dva slučaja:

1° tačka M ili N pripada dijagonali A_sA_t mnogougla $A_1A_2\ldots A_N$

2° tačke M i N ne pripadaju dijagonali A_sA_t mnogougla $A_1A_2\ldots A_N$

Pa razmotrimo prvi slučaj.



Recimo da M pripada dijagonali A_tA_s mnogougla $A_1A_2\ldots A_N$. Slično razmatranje bi imali i za slučaj da tačka N pripada dijagonali.

Posmatrajmo mnogougao $A_1A_2\ldots A_N$ i stranicu A_jA_{j+1} mnogougla kojoj pripada tačka N. Znamo da su tačke B i C sa različitih strana $p(A_j, A_{j+1})$. Ovo znači da poluravan sa ivicom u $p(A_j, A_{j+1})$ koja sadrži tačku B ne sadrži sve vrhove (npr. ne sadrži vrh A_t)

#kontradikcija

(za konveksan mnogougao svi vrhovi mnogougla se nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu mnogougla).

Prema tome prvi slučaj nije moguć.

Međutim ako bi bio drugi slučaj odmah imam da su A i B unutrašnje tačke mnogougla $A_1A_2\ldots A_N$ ali $AB \not\subset$ mnogouglu

$\Rightarrow$ mnogougao $A_1A_2\ldots A_N$ nije konveksan

#kontradikcija (mnogougao je konveksan)

Možemo zaključiti: Svaka dijagonala dijeli konveksan mnogougao na dva konveksna mnogougla.

q.e.d.

b) Dokaz za ovaj dio se lagano može svesti na dio pod a). Neka je dat konveksan mnogougao $A_1A_2\ldots A_N$ i neka su A i B proizvoljne tačke na različitim stranicama mnogougla. Sad možemo posmatrati mnogougao $A_1A_2\ldots A_iAA_{i+1}\ldots A_jBA_{j+1}\ldots A_N$ i sprovesti razmatranje kao u slučaju pod a). Prema tome svaka duž čije krajnje tačke pripadaju različitim stranicama konveksnog mnogougla dijeli taj mnogougao na dva konveksna mnogougla.

q.e.d.

(#) Naći sve involutivne transformacije podudarnosti u ravni (involutivna - sama sebi inverzna).

Rj.

postavka zadatka

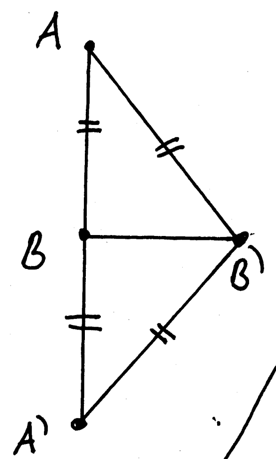
$$\left.\begin{array}{l}\Pi \text{ transformacija podudarnosti u ravni} \\ \Pi\circ\Pi = id\end{array}\right\} \Rightarrow \Pi \text{ je } \underline{\qquad\qquad};\ \underline{\qquad\qquad}.$$

$\Pi\circ\Pi = id \Rightarrow \Pi = id \vee \Pi \neq id$

Kako je id (identitet) transformacija podudarnosti u ravni i vrijedi $id\circ id = id$ $\Rightarrow$ id je involutivna transformacija podudarnosti u ravni.

Neka je sad $\Pi \neq id$ involutivna transformacija podud. u ravni. Π nije identitet pa $\exists$ tačka A takva da $\Pi(A) = A'$. Kako je Π involutivna transformacija to $\Pi\circ\Pi(A) = A$ tj. $\Pi(\Pi(A)) = \Pi(A') = A$. Prema tome imamo

$$\Pi(A) = A' \quad ; \quad \Pi(A') = A.$$



Označimo sa B sredinu duži AA'. Za tačku B je moguć tačno jedan od sljedeća dva slučaja:

1° $\Pi(B) = B$

2° $\Pi(B) = B'$; $B \neq B'$.

Da bi odredili šta je Π, posmatraćemo ponašanje involutivne transf. podud. Π na tri nekolinearne tačke u ravni.

Ako bi bio drugi slučaj, kako transformacija Π čuva dužine, bi imali sljedeće:

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong \pi(A)\pi(B) = A'B' \\ AB \cong A'B \ (B \text{ sredina } AB) \\ A'B \cong \pi(A')\pi(B) = AB' \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ i } A' \text{ leže na simetrali duži } BB'$$

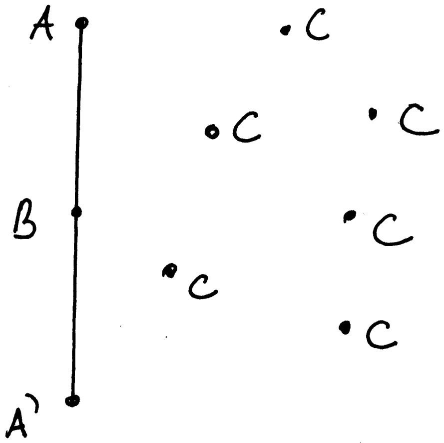
$$\Downarrow$$

$B \notin p(A, A')$ # kontradikcija (sa činjenicom da je B sredina AA')

Prema tome pretpostavka da je 2° nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Tj. imamo

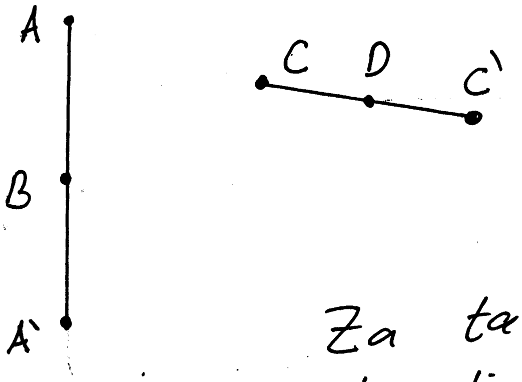
$$\pi(B) = B$$

Sad se pitamo da li postoji tačka C $\vee$ ($C \notin p(A, A')$) t.d. $\pi(C) \neq C$?



Ako bi bilo $\pi(C) = C$ za svaku tačku $C \notin p(A, A')$, kako π čuva dužine imali bi $AC \cong A'C$ $\forall C$ što je očigledno nemoguće (samo tačke sa simetrale duži AA' imaju tu osobinu).

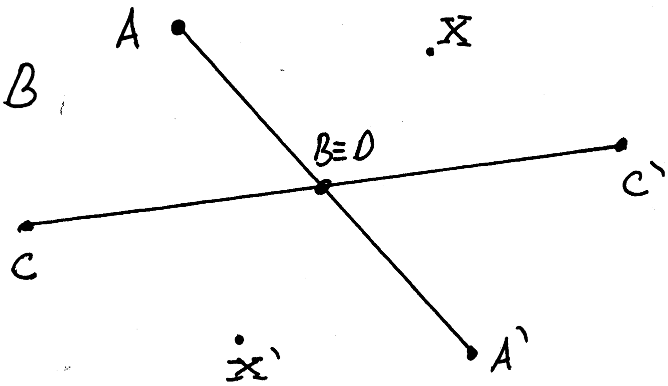
Prema tome $\exists$ tačka C t.d. $\pi(C) = C'$ i $C \neq C'$.



Ako sa D označimo sredinu duži CC' na isti način kao maloprije nije teško pokazati da je $\pi(D) = D$.

Za tačku D je moguć tačno jedan od sljedeća dva slučaja: 1° $D \equiv B$
2° $D \neq B$.

1° $D \equiv B$



Tačke A, B i C su nekolinearne i za njih važi sljedeće:
$\pi(A) = A'$, $\pi(B) = B$, $\pi(C) = C'$

$\pi(A) = A'$ i B sredina duži AA'

$\pi(C) = C'$ i B sredina duži CC'

Za proizvoljnu tačku X iz ravni ABC takvu da $X \neq B$ imamo da je ili $\pi(X) = X$ ili $\pi(X) = X'$ $(X \neq X')$.

Ako bi bilo $\pi(X) = X$ nije teško pokazati da bi tada X pripadala simetrali duži AA' i simetrali duži CC'. Kako su to dvije različite simetrale a X pripada i jednoj i drugoj X je presječna tačka simetrala. Ali, kako se ove simetrale sijeku u tački B (OBJASNITI ZAŠTO) dobili bi da je $X \equiv B$ # kontradikcija.

Prema tome mora biti $\pi(X) = X'$ i $X \neq X'$. Sad imamo

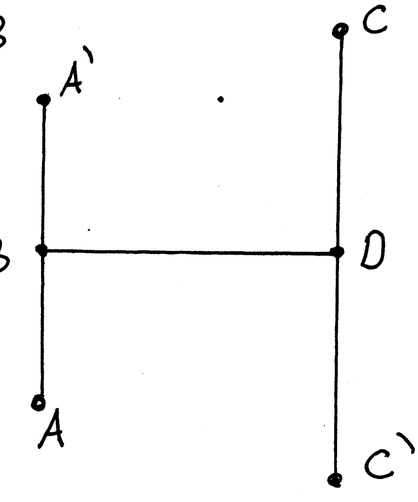
$$\left.\begin{array}{l} AX \cong \pi(A)\pi(X) = A'X' \\ XB \cong \pi(X)\pi(B) = X'B \\ AB \cong A'B \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \triangle ABX \cong \triangle A'BX'$$

$$\Downarrow$$

B je sredina XX'

Prema tome naša transformacija podudarnosti π ima samo jednu fiksnu tačku B; svaku tačku X iz ravni preslikava u neku novu tačku X' tako da je B sredina duži XX'. Iste ove osobine ima i centralna simetrija. Prema tome π je centralna simetrija sa centrom simetrije u tački B.

2° $D \neq B$



Pokazati za vežbu da u ovom slučaju π mora biti osna simetrija sa osom u pravoj $p(B, D)$.

Prema tome našli smo tri involutivne transformacije podudarnosti u ravni:

1. identitet 2. centralna simetrija 3. osna simetrija.

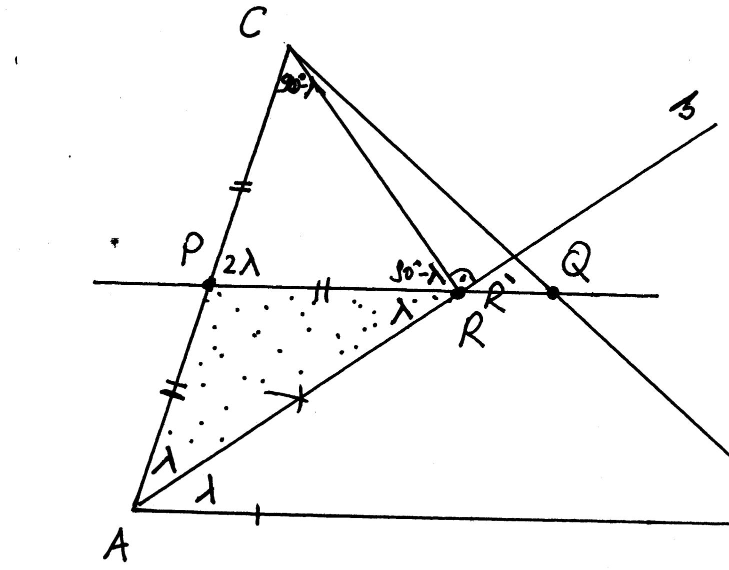
(#) Neka su P i Q redom sredine stranica AC i BC trougla ΔABC, R ortogonalna projekcija tjemena C na simetralu ugla $\measuredangle BAC$. Dokazati da su tačke P, Q i R kolinearne.

Rj.

postavka zadatka:

$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ P \text{ sredina } AC \\ Q \text{ sredina } BC \\ s \text{ simetrala ugla } \measuredangle BAC \\ R \text{ ortogonalna projekcija tjemena } C \text{ na } s \end{array}\right\} \Rightarrow P, Q \text{ i } R$ su kolinearne tačke

---



P sredina AC, Q sredina BC

$\Rightarrow PQ$ srednja linija trougla

$\Rightarrow PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2} AB$

$PQ \parallel AB$ i $p(A,C)$ transferzala

$\Rightarrow \measuredangle BAC \cong \measuredangle QPC = 2\lambda$

Označimo sa R' presjek simetrale s i $p(P,Q)$.

Posmatrajmo $\Delta APR'$. Vanjski ugao tog trougla je $\measuredangle R'PC = 2\lambda$. Kako je vanjski ugao jednak zbiru unutrašnja dva nesusjedna ugla i $\measuredangle R'AP = \lambda$ imamo da je $\measuredangle AR'P = \lambda$.

$\Rightarrow \Delta APR'$ je jkk. tj. $AP \cong PR'$.

P je sredina $AC \Rightarrow AP \cong PC \Rightarrow \Delta CPR'$ je jkk sa osnovicom u CR, i uglom $\measuredangle CPR = 2\lambda$.

Imamo da $\measuredangle PCR' \cong \measuredangle PR'C = 90^\circ - \lambda$.

$\measuredangle AR'C = \lambda + 90^\circ - \lambda = 90^\circ \xRightarrow{R \text{ ortog. pr. na } s} R' \equiv R$

Prema tome tačke R, P i Q su kolinearne

q.e.d.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 30.06.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) Nacrtati trougao $\triangle ABC$, $(\beta > \alpha)$ i visinu h_c iz vrha C. Tačku u kojoj visina h_c iz vrha C siječe pravu AB označimo sa E. Produžimo stranicu BC preko vrha C, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $p(A, B)$ označi sa D. Ako je $\frac{1}{2}CD = CE$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$.

b) Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

c) Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB $(A, B \in k,\ S \in AB)$. Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC + BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

d) Neka je k krug koji je opisan oko trougla $\triangle ABC$, $AB < AC$ i neka je tačka N središte luka AC (kojem pripada i tačka B) kruga k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačka presjeka prave $p(N, M)$ i opisanog kruga. Dokazati da je NP prečnik opisanog kruga.

e) Dokazati da su dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ podudarna ako je $c = c'$, $h_c = h_{c'}$ i $t_c = t_{c'}$, gdje su h_c i $h_{c'}$ visine, a t_c i $t_{c'}$ težišnice trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ redom na stranice c i c'.

Zadatak br. 2

U ravni je dato n duži $(n \geq 3)$, takve da svake tri od njih imaju zajedničku tačku. Dokazati da postoji tačka zajednička za sve duži.

Zadatak br. 3

Data je transformacija podudarnosti π. Dokazati da su sve tačke prave $\pi(a)$ fiksne tačke transformacije $\alpha = \pi \circ \sigma_a \circ \pi^{-1}$. Na osnovu toga odrediti šta predstavlja transformacija α. Napomena: Fiksna tačka transformacije π je svaka tačka B za koju je $\pi(B) = B$.

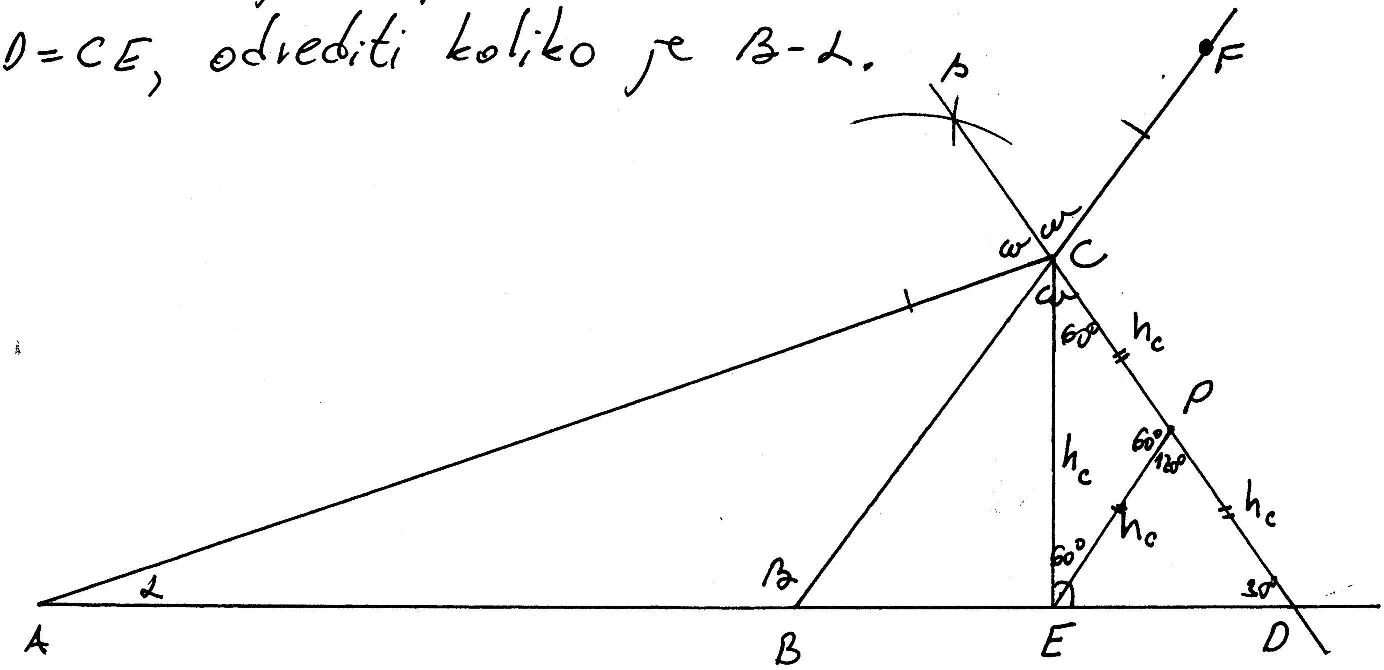
Zadatak br. 4

Dat je trougao $\triangle ABC$ i proizvoljna tačka P na krugu opisanom oko tog trougla. Neka su M, N i R redom podnožja normala povučenih iz tačke P na prave $p(A, B)$, $p(B, C)$ i $p(C, A)$. Dokazati da su tačke M, N i R kolinearne.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Nacrtaj trougao ΔABC, $(\beta > \alpha)$ i visinu h_c iz vrha C. Tačku u kojoj visina h_c iz vrha C siječe pravu AB označi sa E. Produži stranicu BC preko vrha C, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $p(A,B)$ označi sa D. Ako je $\frac{1}{2}CD = CE$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$.

Rj.



Označimo sa s simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Ako $\angle ACF$ označimo sa 2ω (gdje je $F \in pp[B,C)$ t.d. $B-C-F$) primjetimo da je $\angle BCD = \omega$ (unakrsni uglovi).

Sad posmatrajmo ΔEDC (pravougli trougao) kod kojeg imamo da je $CD = 2h_c$. Ako sa P označimo sredinu stranice CD možemo primjetiti da je $CP \cong DP = h_c$ i da je $EP = h_c$ (ZAŠTO?).

ΔEPC jks $\Rightarrow \angle EPC = 60° \Rightarrow \angle EPD = 120° \overset{\Delta EDP \text{ jkk}}{\Rightarrow} \angle EDP = 30°$.

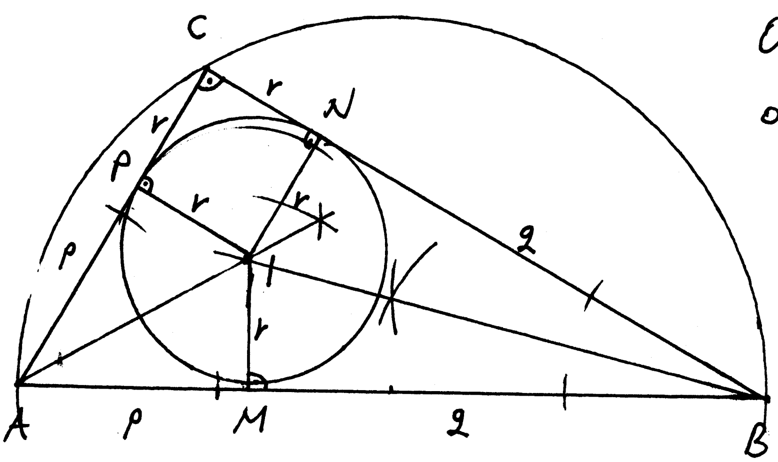
Ugao $\angle ACF$ vanjski ugao $\Delta ABC \Rightarrow 2\omega = \alpha + \beta$ ...(1)

Ugao $\angle ABC$ vanjski ugao $\Delta BDC \Rightarrow \beta = \omega + 30°$ tj. $\omega = \beta - 30°$ ...(2)

(1) i (2) $\Rightarrow 2\beta - 60° = \alpha + \beta \Rightarrow \beta - \alpha = 60°$ ← traženi rezultat

(#) Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

Rj.



Neka je I centar upisanog kruga u trouglu ΔABC. Označimo sa M, N i P ortogonalne projekcije tačke I na duži AB, BC i AC redom. Znamo da je $IM = IN = IP = r$.

Dalje, primjetimo da je $BM \cong BN$ i $AM \cong AP$ (Zašto?). Isto tako $PC \cong CN \cong r$ (Zašto?)

Neka je $AM = p$ i $BM = q$.

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(p+r)(q+r)}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{pq + pr + qr + r^2}{2} \quad \ldots (1)$$

ΔABC pravougli $\Rightarrow$ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$(p+q)^2 = (p+r)^2 + (q+r)^2$$

$$\cancel{p^2} + 2pq + \cancel{q^2} = \cancel{p^2} + 2pr + r^2 + \cancel{q^2} + 2qr + r^2 \quad | : 2$$

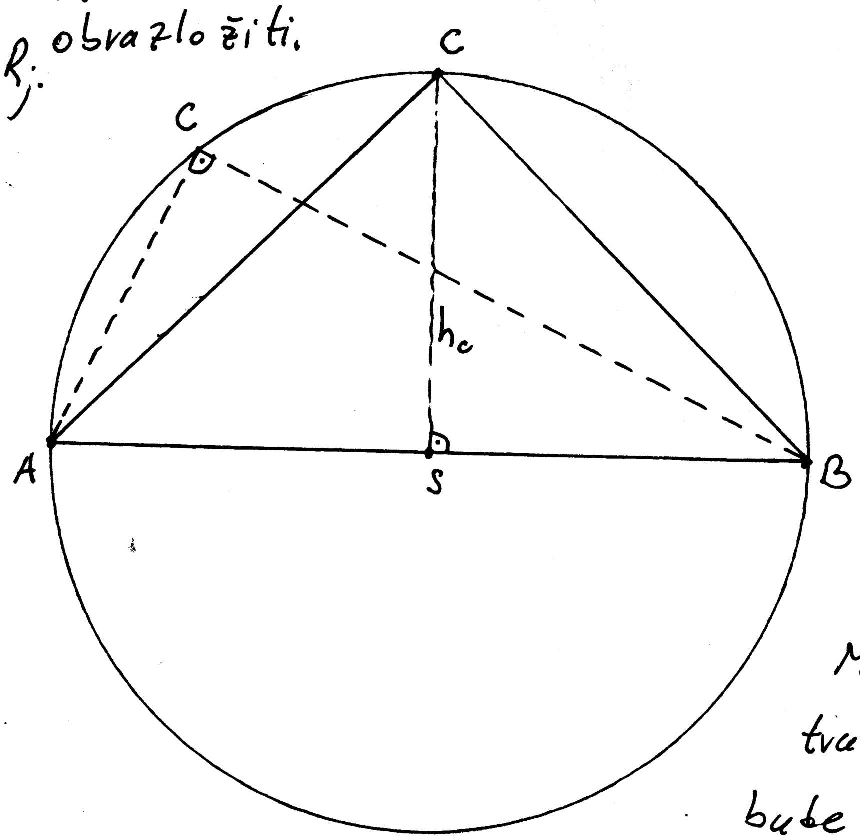
$$pq = pr + qr + r^2 \quad \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $P_{\Delta ABC} = \dfrac{pq + pq}{2} = pq$

q.e.d.

(#) Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A, B \in k$, $S \in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC+BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

Rj:



Za svaku tačku C na krugu k dobićemo pravougli trougao ΔABC (ugao nad prečnikom je pravi).

Površina pravouglog trougla je $P = \frac{a \cdot b}{2}$.

Možemo primjetiti da problem traženja da zbir duži $AC+BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći,

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot h_c}{2}$$ (h_c - visina spuštena iz vrha C).

Prema tome problem da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja tačke C takve da visina h_c bude najveća.

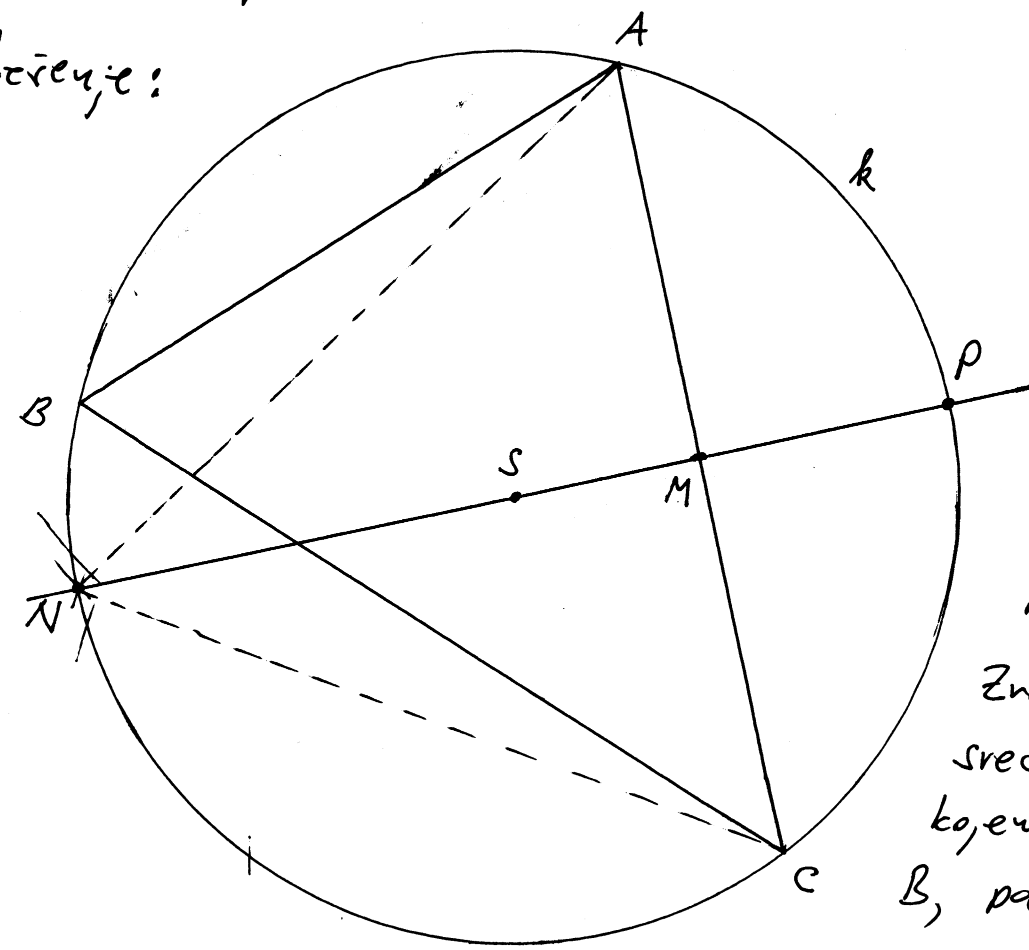
Najveća tetiva u krugu je prečnik kružnice pa naša visina treba da bude dio tog prečnika ili drugačije rečeno naša visina treba da bude poluprečnik CS kruga takav da $CS \perp AB$. Sad nije teško primjetiti da iz podudarnosti SUS slijedi da su ΔASC i ΔBSC podudarni $\Rightarrow AC \cong BC$.

Prema tome, da bi zbir duži $AC+BC$ bio najveći tačku C trebamo izabrati takvu da je $AC \cong BC$.

q.e.d.

(#) Neka je k kružnica koja je opisana oko trougla ΔABC, $AB < AC$, i neka je tačka N središte luka $\widehat{AC}$ (kojem pripada i tačka B) kružnice k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačku preseka prave $p(N,M)$ i opisane kružnice. Dokazati da je NP prečnik opisane kružnice.

Rješenje:



Na osnovu postavke zadatka tačka M pripada duži NP.

Da bi pokazali da je duž NP prečnik opisane kružnice trebamo pokazati da tačka S pripada duži NP.

Znamo da je N sredina luka $\widehat{AC}$ kojem pripada tačka B, pa je N podjednako udaljena od tački A i C tj. $AN \cong NC$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} AN \cong NC \\ NM \cong NM \\ AM \cong MC \text{ (M sredina } AC) \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta ANM \cong \Delta CNM$$

$$\Downarrow$$

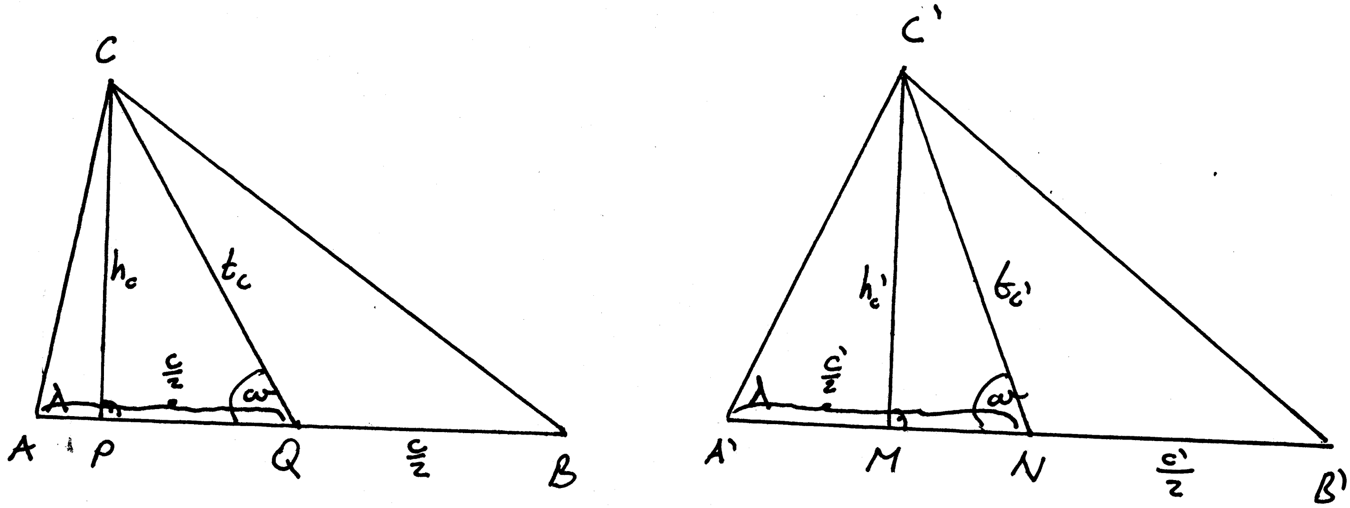
$$\measuredangle AMN \cong \measuredangle CMN = 90^\circ \Rightarrow NP \text{ simetrala duži } AC$$

Kako je centar opisane kružnice presjek simetrala stranica to S leži na simetrali stranice AC tj. na NP.

$\Rightarrow$ NP je prečnik opisane kružnice.

Dokazati da su dva trougla ΔABC i $\Delta A'B'C'$ podudarna ako je $c=c'$, $h_c=h_{c'}$ i $t_c=t_{c'}$, gdje su h_c i $h_{c'}$ visine, a t_c i $t_{c'}$ težišnice trouglova ΔABC i $\Delta A'B'C'$ redom iz vrhova C i C'.

Rj.



Uvedimo oznake kao sa slike.
Posmatrajmo ΔPQC i $\Delta MNC'$.

$$\left.\begin{array}{l} CQ \cong C'N \ (t_c=t_{c'}) \\ CP \cong C'M \ (h_c=h_{c'}) \\ \sphericalangle CPQ \cong \sphericalangle C'MN = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(ugao naspram veće stranice}]{SSU} \Delta PQC \cong \Delta MNC'$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle AQC \cong \sphericalangle A'NC' = \omega$$

Kako je $c=c'$ to je i $\frac{c}{2}=\frac{c'}{2}$, pa posmatrajmo ΔAQC i $\Delta A'NC'$.

$$\left.\begin{array}{l} AQ \cong A'N \ (\frac{c}{2}=\frac{c'}{2}) \\ \sphericalangle AQC \cong \sphericalangle A'NC' = \omega \\ CQ \cong C'N \ (t_c=t_{c'}) \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta AQC \cong \Delta A'NC'$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle CAQ \cong \sphericalangle C'A'N = \lambda$$

$$\text{i } AC \cong A'C'$$

Na kraju posmatrajmo ΔABC i $A'B'C'$.

$$\left.\begin{array}{l} AC \cong A'C' \\ \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B' = \lambda \\ AB \cong A'B' \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

q.e.d.

(#) U ravni je dato n duži ($n \geq 3$), takve da svake tri od njih imaju zajedničku tačku. Dokazati da postoji tačka zajednička za sve duži.

Rj. postavka zadatka

dato je n duži $A_{11}A_{12}, A_{21}A_{22}, \dots, A_{n1}A_{n2}$ tako da svake tri imaju zajedničku tačku $\Longrightarrow$ postoji zajednička tačka za sve duži

---

Zadatak dokažimo matematičkom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE

$k=3$: Neka su date tri duži $A_{11}A_{12}$, $A_{21}A_{22}$ i $A_{31}A_{32}$. Dvije duži mogu da imaju najviše jednu zajedničku tačku. Prema pretpostavci tri duži imaju zajedničku tačku, prema tome tvrdnja je tačna za tri duži

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da postoji zajednička tačka za k duži gdje je $3 \leq k \leq n$. Na osnovu ove pretpostavke pokažimo da postoji zajednička tačka za $n+1$ duž.

Pa posmatrajmo $n+1$-nu duž $A_{11}A_{12}, A_{21}A_{22}, \dots, A_{n1}A_{n2}, A_{n+1,1}A_{n+1,2}$

Na osnom pretpostavke n duži $A_{11}A_{12}, A_{21}A_{22}, \dots, A_{n1}A_{n2}$ imaju neku zajedničku tačku B. Na osnom pretpostavke zadatka tri duži $A_{11}A_{12}$, $A_{21}A_{22}$ i $A_{n+1,1}A_{n+1,2}$ imaju zajedničku tačku. Kako duži $A_{11}A_{12}$ i $A_{21}A_{22}$ već imaju zajedničku tačku B to će i duž $A_{n+1,1}A_{n+1,2}$ sadržavati tačku B. Prema tome tačka B je zajednička tačka za $n+1$-nu duž $A_{11}A_{21}, \dots, A_{n+1,1}A_{n+1,2}$.

ZAKLJUČAK

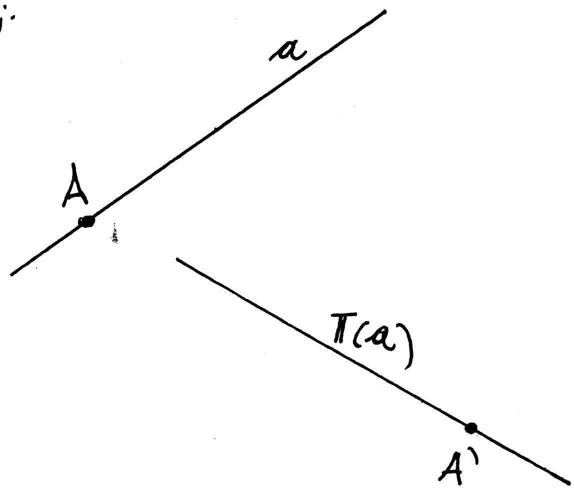
Za $n \in \mathbb{N}$ datih duži u ravni gdje je $n \geq 3$, ako svake tri od njih imaju zajedničku tačku tada postoji zajednička tačka za sve duži.

q.e.d.

(#) Data je transformacija podudarnosti π. Dokazati da su sve tačke prave $\pi(a)$ fiksne tačke transformacije $\alpha = \pi \circ \sigma_a \circ \pi^{-1}$. Na osnovu toga odrediti šta predstavlja transformacija α.

Napomena: Fiksna tačka transformacije π je svaka tačka B za koju je $\pi(B) = B$.

Rj.:



postavka zadatka

$\left.\begin{array}{c} \pi \text{ transf. podud.} \\ \alpha = \pi \circ \sigma_a \circ \pi^{-1} \text{ transf. podud.} \end{array}\right\} \Rightarrow$ sve tačke transf. α su fiksne tačke, α je ______.

______ ______ ______

Neka je A' proizvoljna tačka sa prave $\pi(a)$. Znamo da $\exists$ tačka $A \in a$ t.d. $\pi(A) = A'$ $(\pi^{-1}(A') = A)$.

Sad imamo $\alpha(A') = \pi \circ \sigma_a \circ \pi^{-1}(A') = \pi(\sigma_a(\pi^{-1}(A'))) = \pi(\sigma_a(A)) \overset{A \in a}{=} \pi(A) = A'$

tj. $\alpha(A') = A'$. Kako je A' proizvoljna tačka sa $\pi(a)$ možemo zaključiti:

Sve tačke prave $\pi(a)$ su fiksne tačke transformacije α.

q.e.d.

Odredimo šta predstavlja α.

$$\alpha \circ \alpha = \pi \circ \sigma_a \circ \underbrace{\pi^{-1} \circ \pi}_{id} \circ \sigma_a \circ \pi^{-1} = \pi \circ \underbrace{\sigma_a \circ \sigma_a}_{id} \circ \pi^{-1} = \pi \circ \pi^{-1} = id$$

tj. $\alpha \circ \alpha = id \Rightarrow$. α je involutivna transformacija pa može biti:

1. identitet
2. centralna simetrija
3. osna simetrija

Ako bi α bila identitet imali bi $\alpha = id$

$\pi \circ \sigma_a \circ \pi^{-1} = id$ $/ \circ \pi$ sa desne str.

$\pi \circ \sigma_a = \pi$ $/ \circ \pi^{-1}$ sa lijeve str.

$\sigma_a = id$ # kontradikcija (osna simetrija nije identitet)

α ne može biti centralna simetrija zato što centralna simetrija ima samo jednu fiksnu tačku, a mi smo pokazali da α ima sve tačke sa prave $\pi(a)$ kao fiksne tačke.

Prema tome α je osna simetrija.

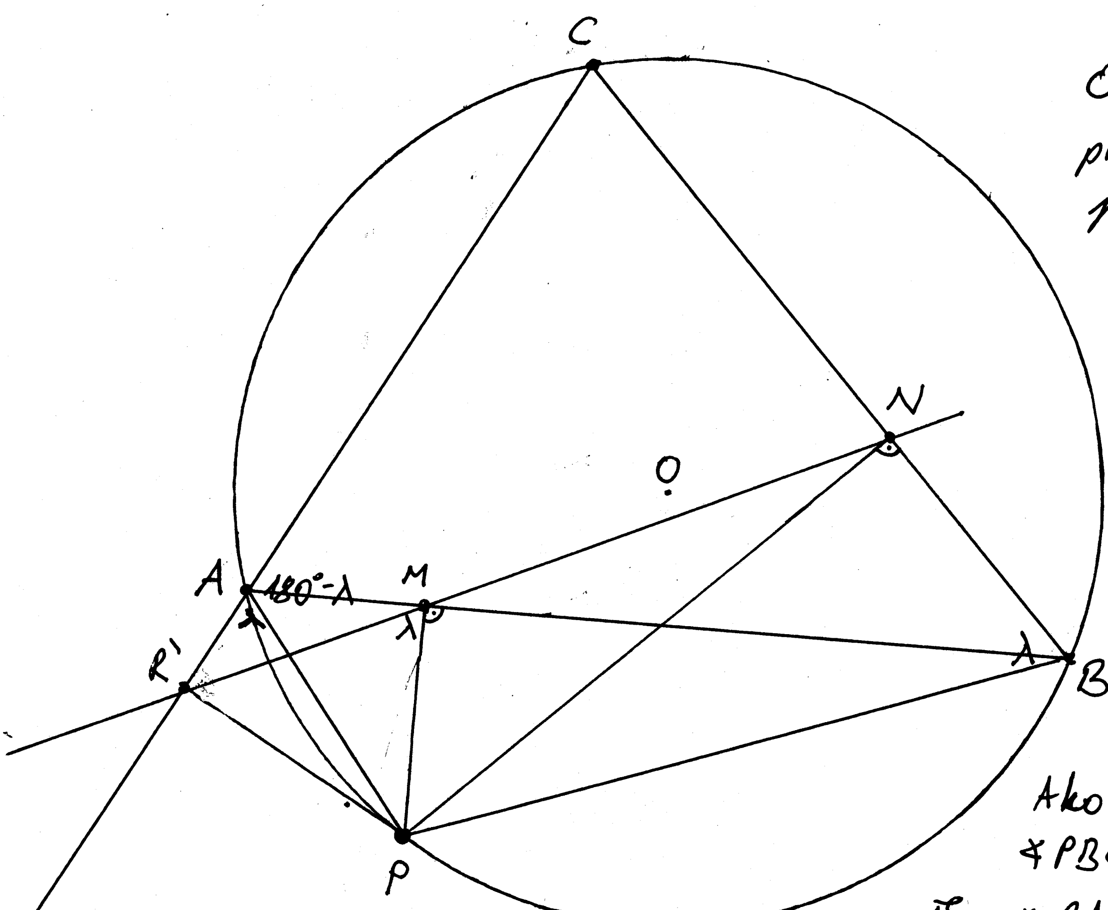
Osa simetrije transformacije α je prava $\pi(a)$, tj.

$$\alpha = \sigma_{\pi(a)}.$$

Dat je trougao ΔABC i proizvoljna tačka P na krugu opisanom oko tog trougla. Neka su M, N i R redom podnožja normala povučenih iz tačke P na prave $p(A,B)$, $p(B,C)$ i $p(C,A)$. Dokazati da su tačke M, N i R kolinearne.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ k(O,r) \text{ krug opisan oko } \Delta ABC \\ P \in k \\ M, N \text{ i } R \text{ redom ortogonalne projekcije} \\ \quad \text{tačke } P \text{ na } p(A,B), p(B,C) \text{ i } p(C,A) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{tačke} \\ M, N \text{ i } R \\ \text{su kolinearne}\end{array}$$



Označimo sa R' presjek pravih $p(M,N)$ i $p(A,C)$. Ako pokažemo da je $\angle CR'P$ prav, naš dokaz je gotov. Posmatrajmo $\square APBC$ (tetivni četvorougao). Ako označimo $\angle PBC = \lambda$ imamo da je $\angle PAC = 180° - \lambda$

$\Rightarrow \angle PAR' = \lambda$. Četvorougao $\square PBNM$ je tetivni (uglovi $\angle BNP$ i $\angle BMP$ gledaju na istu stranicu PB i podudarni su) $\Rightarrow \angle NMP = 180° - \lambda \Rightarrow \angle PMR' = \lambda$. Primjetimo sad da je $\square R'PMA$ tetivni ($\angle PMR' \cong \angle PAR' = \lambda$) $\Rightarrow \angle PR'A + \angle PMA = 180°$, pa kako je $\angle PMA = 90° \Rightarrow \angle PR'A = 90° \Rightarrow R' \equiv R \Rightarrow$ tačke M, N i R su kolinear.

q.e.d.